Systematisk arbeid med tekstoppgaver i utviklende opplæring

Novemberkonferansen 2021
1. desember
Kjersti Melhus

Universitetet i Stavanger

1

Hva er en tekstoppgave?

- En **tekstoppgave** er en «fortelling» der det gis opplysninger om noen tall/størrelser og der man blir bedt om å finne et ukjent tall/størrelse (ev. flere) som er avhengige av de som er gitt.
- Består av opplysninger og spørsmål (direkte eller indirekte).
- Man må «gjøre noe» (av matematisk karakter) for å kunne svare på spørsmålet.
- Du får ikke oppgitt **hva** du må gjøre (f.eks. hvilken regneoperasjon du må bruke).

2

Tekstoppgaver og kjerneelementene

- Kan spesielt knyttes til «**modellering og anvendingar**».
- Strategier for arbeid med tekstoppgaver har mange likhetstrekk med strategier for **problemløsing.**
- For å løse en tekstoppgave må elevene veksle mellom ulike språklige og symbolske koder. Dette kan knyttes til «**representasjon og kommunikasjon**».
- Diskusjon omkring ulike løsninger av tekstoppgaver kan knyttes til «**resonnering og argumentasjon**».
- Elevene bør etter hvert kjenne igjen oppgavetyper. Det innebærer bl.a. å se likheter mellom oppgaver med ulikt innhold og ulikheter mellom oppgaver med likt innhold. Dette kan knyttes til «**abstrahering og generalisering**».
- Arbeid med tekstoppgaver involverer viktige **matematiske emner**. På barnetrinnet gjelder det spesielt tall og algebra.

3

Zankovs undervisningsprinsipper

Teoretiske prinsipper:

1. Undervisning på et høyt nivå
2. Teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle
3. Rask gjennomgang av lærestoffet
4. Bevisstgjøring av elevene i forhold til egen læringsprosess
5. Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet

Metodiske prinsipper:

- Allsidighet (bredt fokus)
- Progresjon
- Kognitiv konflikt (konfrontasjon)
- Fleksibilitet (tilpasset opplæring)

4

Arbeid med tekstoppgaver i UOM*

- Det arbeides systematisk og målrettet – med en klar progresjon.
- Utgangspunktet er:
  - Hva får vi vite? (opplysninger/informasjon)
  - Hva skal vi finne ut? (spørsmål – direkte el. indirekte)
- Elevene lærer å skrive tekstoppgaven kort på ulike måter: stikkordsform, tabell, modell, …
- Mye diskusjon. Elevene får hint hvis de står fast. Valg av strategi, modell, regneoperasjoner, osv. må begrunnes.
- Man jobber motsatt: elevene lager egne spørsmål eller opplysninger, lager egen oppgave til en gitt modell, osv.
- Tekstoppgaver sammenliknes – hva er likt, hva er ulikt? Kan de løses med samme strategi/modell? Hva om oppgaven endres – hvilken betydning får det for svaret? For løsningsstrategien?

*UOM står for Utviklende Opplæring i Matematikk

5

Komponenter i arbeidet med tekstoppgaver

- Viktig mål:
  Elevene skal lære seg å jobbe med teksten.

I startfasen innebærer dette:

- Analyse av teksten for å avgjøre om det er en «tekstoppgave»
- Finne sammenheng mellom alle delene i oppgaven (Observere plassering av opplysninger, spørsmål, kjente og ukjente tall.)
- Få forståelse for betydningen av hver del i oppgaven (Forstå at hvis en av delene mangler, så er det ikke en tekstoppgave. Forstå at det er sammenheng mellom endring av en del og løsningen – observere hva som skjer.)

6

Komponenter i arbeidet

1. Få kjennskap til terminologi:
   - Tekstoppgave
   - Opplysninger og spørsmål
   - Kjente og ukjente tall

Er dette en **tekstoppgave**? Begrunn svaret.
Ole Brumm spiste 3 krukker med honning. Han hadde 9 krukker igjen. Hvor mange krukker hadde Ole Brumm til å begynne med?

Strek under **opplysninger** med blått og **spørsmål** med rødt.
Hvilke tall er **kjente**? I hvilken del av oppgaven finner du dem?
I hvilken del av oppgaven er det et **ukjent** tall?

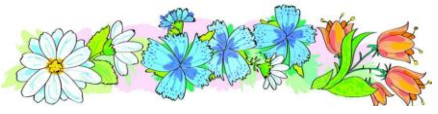
7

Komponenter i arbeidet

2. Gjengi oppgaven med egne ord. Må gjerne oppgaven lese flere ganger.
3. Formulere egne tekstoppgaver, ev. fullføre en tekst slik at det blir en tekstoppgave.

a) Er dette en tekstoppgave?
Tre brødre plukket blomster til mor. Kristian plukket 7 prestekrager, Aksel plukket 6 kornblomster og Kasper plukket 9 tulipaner.

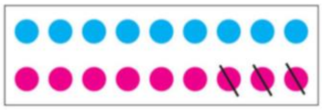
b) Fortsett teksten slik at det blir en tekstoppgave.
Løs oppgaven.



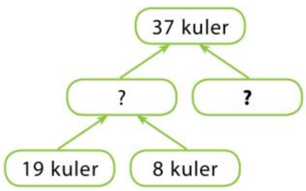
8

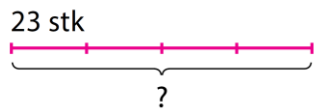
Komponenter i arbeidet

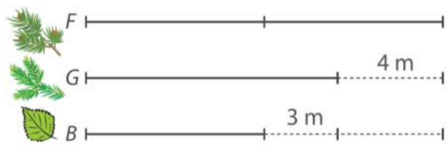
4. Lære seg ulike måter å skrive en oppgave kort på (inkl. modell). For eksempel:



2A: 36 boller
2B: 12 færre boller
Hvor mange laget 2B?







Komponenter i arbeidet

5. «Leke» seg med oppgaven/teksten (bytte om på hva som er kjent/ukjent (motsatte oppgaver), lage andre spørsmål, endre opplysninger, …)
6. Sammenlikne oppgaver som har:
   – samme handling, men ulikt matematisk innhold
   – ulik handling, men likt matematisk innhold. Oppgavetyper – generalisering.
7. Endre oppgaver, vurdere konsekvenser dette har (Vil svaret endres? Vil løsningsstrategien endres? Blir oppgaven lettere/vanskeligere?)

Eksempel 1

a) Er det en tekstoppgave? Begrunn.

Det står 11 biler på den øverste hyllen og 18 biler på den nederste. Hvor mange biler står på den øverste hyllen?

b) Bytt ut spørsmålet med et annet slik at du får en tekstoppgave. Løs oppgaven.

c) Behold det første spørsmålet, men gjør endringer i opplysningene slik at du får en tekstoppgave. Løs oppgaven.

d) Sammenlikn oppgavene dine. Er de forskjellige?

Sammenlikn løsningene. Er de forskjellige? Hva går forskjellen ut på?

11

Eksempel 2

a) Løs tekstoppgaven.

Det er 92 bøker på to hyller. Hvis vi flytter 6 bøker fra den ene hyllen til den andre, blir det like mange bøker på hver hylle. Hvor mange bøker er det på hver hylle i utgangspunktet? Hvor mange færre bøker er det på den ene enn på den andre?

b) Løs samme oppgave en gang til, men denne gangen er det gitt at det er 116 bøker til sammen. Prøv også med 108 bøker til sammen.

c) Sammenlikn svarene du fikk. Hva er det som endres? Hva er det som ikke endres?

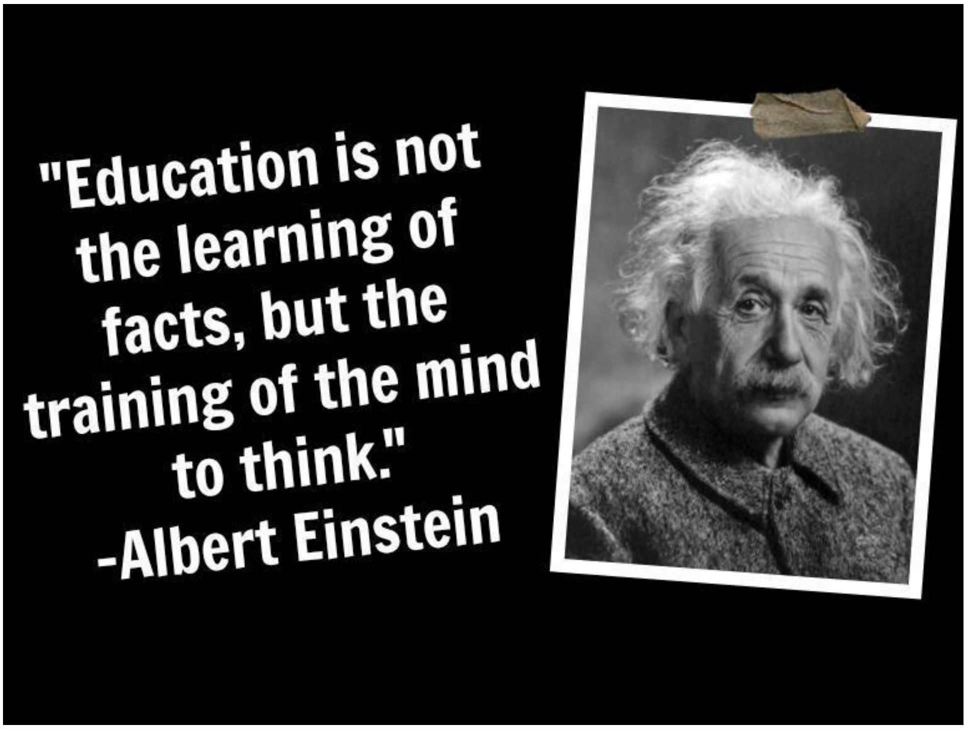
12

Les mer om utviklende opplæring (UOM)

www.matematikklandet.no
Utdanning, nr. 13, 2014, s. 50-53 (link)
Bedre skole nr. 4, 2016, s. 72- 75 (link)
Artikler i Tangenten:
- Å stimulere barns evne til å tenke (nr. 2, 2015) (hele bladet)
- Barn kan mer – ! (nr. 3, 2015) (hele bladet)
- Litt om utviklende opplæring (nr. 3, 2017) (hele bladet)
- Utviklende matematikklæring (nr. 1, 2018) (link)

På engelsk: Guseva & Solomonovich (2017)

14



15

Her følger to sett med tekstoppgaver. For hvert sett bør man jobbe med oppgavene i rekkefølge. Legg merke til progresjonen og hvordan man får hjelp til å takle stadig mer avanserte oppgaver av liknende type.

I det første oppgavesettet – hentet fra 5. trinn – er det å tegne modell et viktig hjelpemiddel. Tekstoppgavene inneholder en del tekst, men et viktig mål er å gjøre eleven i stand til å håndtere teksten, uten å la seg skremme av den. Når man skal løse en oppgave, anbefales det at man i starten leser teksten to ganger (på lavere trinn gjøres dette gjerne i fellesskap). Første gang leser man oppgaven sammenhengende. Andre gang leser man samtidig som man noterer opplysninger og spørsmål i kort form – i disse oppgaven legges det opp til at den korte formen er en modell. Etter hvert vil elevene sannsynligvis synes det er greit å lage modellen samtidig som teksten leses for første gang.

I det andre oppgavesettet – hentet fra 6. trinn – tar man også utgangspunkt i en modell når man skal resonnere seg fram til en strategi for å løse oppgaven, men her er det ikke meningen at elevene selv skal tegne modeller (det ville betydd at man måtte representere brøker med relativt store nevnere). Modellene er ment å gi hint om hvilken type talluttrykk man kan sette opp, slik at elevene i de videre oppgavene kan sette opp brøker og eventuelt sammensatte uttrykk direkte.

Spesielt i oppgavesett 2 får man tydelig illustrert hva som menes med å «se likheter i ulikheter». Her er det problemstillinger fra ulike kontekster:

- Hvor lang tid tar det å fylle et basseng med vann hvis flere slanger brukes samtidig?
- Hvor lang tid tar det å utføre et arbeid hvis flere jobber samtidig?
- Hvor lang tid tar det for to biler/båter/mennesker… som beveger seg mot hverandre å møtes?

Oppgaver som dette ser ulike ut, men kan løses ved å bruke samme strategi. (I disse oppgavene er det viktig å legge merke til følgende nøkkelspørsmål: Hvor mye får man «gjort» på 1 time/1 min/1 sek?) Det å generalisere er en av matematikkens mest vesentlige egenskaper, noe som også gjenspeiles i læreplanens kjerneelementer.

Legg merke til at det gis hint om mulige modeller, løsninger og uttrykk. Hintene kan hjelpe elevene videre hvis de står fast, men elevene kan også bruke dem til å sjekke sitt eget svar. Det er et viktig poeng at hjelpen skal stimulere tankeprosesser hos elevene og hjelpe dem med å utvikle seg videre – det skal ikke være en ren oppskrift eller «huskeregel». Dette illustrerer prinsippet med å ta ansvar for egen læringsprosess.

Lykke til med oppgavene!

6

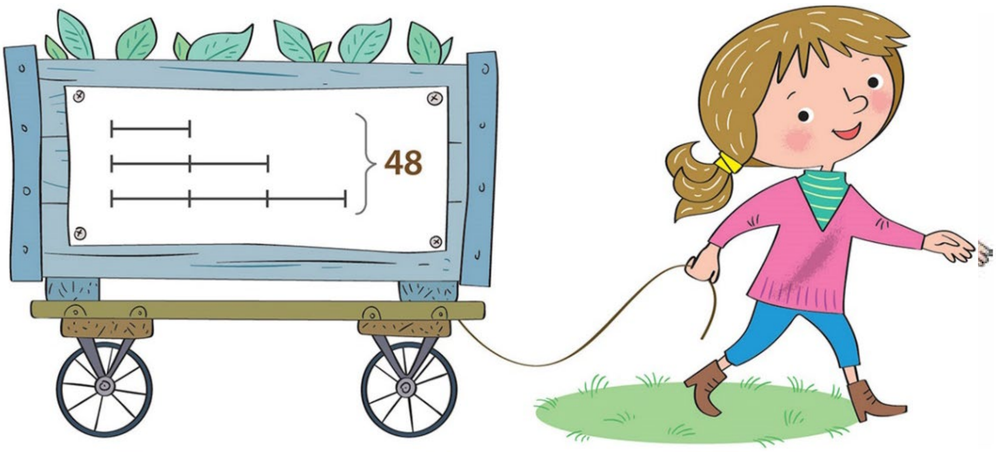
a Sammenlikn tekstoppgavene.

I Vi har tre kasser med epler. I den første kassen er det 48 epler, og i den andre er det dobbelt så mange. I den tredje kassen er det tre ganger så mange epler som i den første. Hvor mange epler er det i den andre kassen? Hvor mange er det i den tredje?

II Vi har tre kasser med til sammen 48 pærer. Det er dobbelt så mange pærer i den andre kassen som i den første, og tre ganger så mange pærer i den tredje som i den første. Hvor mange pærer er det i hver kasse?

Hva er den vesentligste forskjellen mellom oppgavene?

b Hvilken av oppgavene passer denne modellen til?



Hva er forskjellen mellom denne modellen og en som passer til den andre oppgaven?

Løs de to oppgavene trinn for trinn.

c For hvilken av oppgavene kan det passe å starte slik:

1 + 2 + 3 = 6 (deler)

d Hvilken av tekstoppgavene i a) likner denne oppgaven på?

En familie seilte 84 km på tre dager. Den andre dagen seilte de dobbelt så langt som den første dagen, og den tredje dagen seilte de fire ganger så langt som den første dagen. Hvor langt seilte familien hver dag?

Løs oppgaven.

22

a Sammenlikn tekstoppgavene. Hva er den viktigste forskjellen mellom dem?

I På et bord ligger det dobbelt så mange klementiner som appelsiner. Til sammen er det 30 frukter. Hvor mange klementiner og hvor mange appelsiner er det på bordet?

II I en klasse er det 2 flere gutter enn jenter. Til sammen er det 30 elever. Hvor mange jenter og hvor mange gutter er det i klassen?

b Hvilken av oppgavene passer denne modellen til?

Lag en modell som passer til den andre oppgaven.
Løs de to oppgavene.

c Hva ville vært annerledes i oppgaven med gutter og jenter hvis løsningen hadde sett slik ut?

1. 30 – 4 = 26 (elever)
2. 26 : 2 = 13 (jenter)
3. 13 + 4 = 17 (gutter)

d Løs denne oppgaven ved å lage en modell som passer til.

En fotball og en håndball kostet til sammen 180 kr. Fotballen var 36 kr dyrere enn håndballen.
Hvor mye kostet hver ball?

80

a Studer modellen og bruk den til å løse oppgaven.

Det er 59 røde, grønne og gule epler i en kurv. Det er 3 færre røde epler enn grønne og dobbelt så mange gule epler som røde. Hvor mange røde, grønne og gule epler er det i kurven?

b Hvis du står fast, tenk over hvor mange epler det vil være i kurven hvis du tar ut 3 av de grønne.

c Sammenlikn denne oppgaven med den forrige:

Det er 37 epler, pærer og nektariner i en kurv. Det er dobbelt så mange epler som nektariner og 3 flere epler enn pærer. Hvor mange epler, pærer og nektariner er det i kurven?

Lag en modell som passer til oppgaven og løs den.

109

a Lag en modell som passer til oppgaven.

Moren til Anna er 5 ganger så gammel som Anna, mens mormoren er 9 ganger så gammel. Til sammen er de 90 år gamle. Hvor gammel er hver?

Løs oppgaven trinn for trinn.

b Løs oppgaven ved å sette opp en likning.

Hvis du står fast, se på følgende:

Aksel startet med å kalle alderen til Anna for x. Deretter skrev han uttrykket $x + 5 \cdot x + 9 \cdot x$. Hva er meningen bak dette uttrykket? Hva skal verdien til uttrykket være ifølge oppgaveteksten? Sett opp en likning og løs den.

Fikk du $x = 6$ (år)?

Når vi løser en tekstoppgave trinn for trinn eller ved å sette opp et talluttrykk, sier vi at vi løser oppgaven **aritmetisk**.

Når vi løser en tekstoppgave ved å sette opp en likning, sier vi at vi løser oppgaven **algebraisk**.

c Løs oppgaven algebraisk.

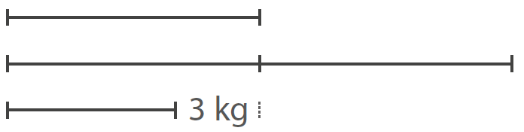
Jacob laget 22 julekort med 3 ulike motiv. Det var 4 ganger så mange kort med juletrær som med snømenn og 6 ganger så mange med nisser som med snømenn. Hvor mange kort med hvert motiv laget Jacob?

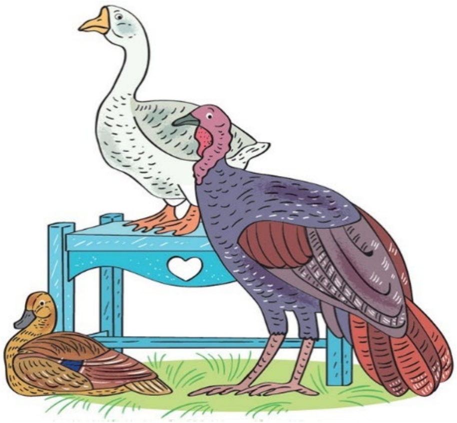
Oppgavesett 1
Oppgavene er hentet fra læreverket Matematikk, Grunnbok 5A. (For mer info: www.matematikklandet.no)

141

a Les oppgaven og studer modellen.

En kalkun er dobbelt så tung som en gås, og gåsen er 3 kg tyngre enn en and. Fuglene veier til sammen 25 kg. Hvor mye veier hver fugl?





Hvilken fugl passer hvert linjestykke til?
Løs oppgaven.

b Hvis du står fast, tenk deg at anden legger på seg 3 kg. Hvordan vil modellen se ut da?
Hva vil være annerledes med løsningen?

c Sammenlikn denne oppgaven med oppgaven i a):

Moren til Anna er 3 ganger eldre enn datteren, og Anna er 4 år eldre enn Vilde. Til sammen er de 56 år. Hvor gammel er hver av dem?

Anna: x
Mor: $3 \cdot x$
Vilde: $x - 4$

Bruke informasjonen i rammen til å sette opp en likning.
Gjør ferdig oppgaven.

175

a Løs oppgaven.

På en gård er det til sammen 98 kyr, sauer og geiter. Det er dobbelt så mange sauer som kyr og 2 færre kyr enn geiter. Hvor mange kyr, geiter og sauer er det?

Matheo begynte på en modell til oppgaven. Har han tenkt rett?

Fullfør modellen, og bruk den til å løse oppgaven.

b Les teksten.

En blomsterbutikk hadde røde, hvite og gule roser. Til sammen var det 182 roser. Det var dobbelt så mange hvite roser som gule og 2 færre hvite roser enn røde.

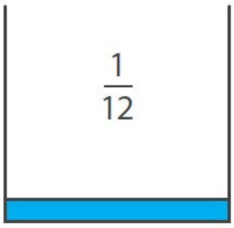
Lag spørsmål til opplysningene slik at svaret blir:

i 38 ii 108 iii 146

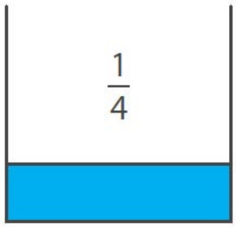
5.20

a Bruk tegningene til å løse oppgaven.

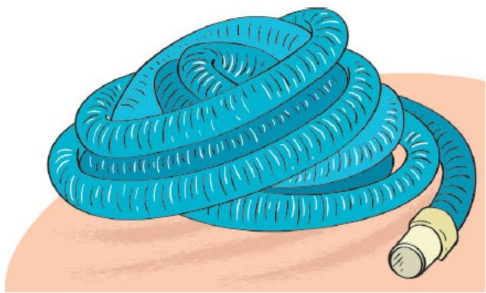
For å fylle vann i et basseng, kan man velge mellom to slanger. Det vil ta 12 timer å fylle bassenget med den ene slangen og 4 timer å fylle det med den andre. Hvor stor del av bassenget vil hver slange rekke å fylle i løpet av 1 time?



Slange 1
Etter 1 time



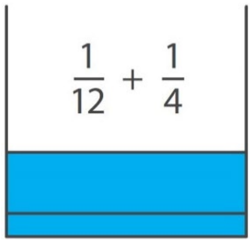
Slange 2
Etter 1 time



b Tenk deg at begge slangene brukes samtidig.

i) Hvor stor del av bassenget vil da være fylt etter 1 time?

ii) Hvor lang tid vil det ta å fylle hele bassenget?



Begge slangene samtidig
Etter 1 time

c Sammenlikn denne oppgaven med den forrige.

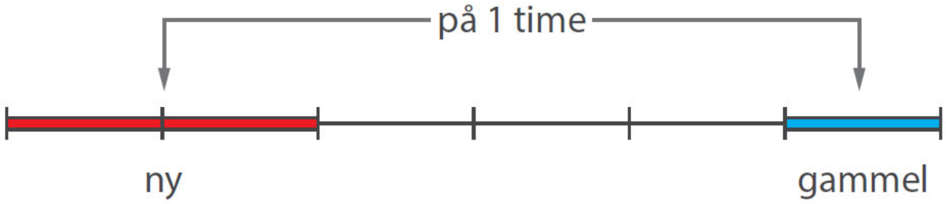
En maler bruker 2 timer på å male en husvegg, mens lærlingen hans bruker 6 timer. Hvor stor del av veggen vil hver av dem male på en time? Hvor lang tid vil det ta å male hele veggen hvis de jobber sammen?

Lag en modell som passer og bruk den til å løse oppgaven.

6.5

a Les tekstoppgaven og prøv å løse den trinn for trinn. Bruk modellen hvis du trenger det.

Med den nye plenklipperen tar det 3 timer å klippe plenen i en park. Med den gamle tar det 6 timer. Hvor lang tid tar det hvis man bruke begge klipperne samtidig?



b **Asgeir** løste oppgaven slik:

La arealet til plenen være 1.

1. $1 : 3 = \frac{1}{3}$
2. $1 : 6 = \frac{1}{6}$
3. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$
4. $1 : \frac{1}{2} = 2$

Forklar hva Asgeir har funnet i hvert trinn.

c Les teksten.

Tina kjører strekningen Arendal-Oslo på 3 timer, mens Kalle som har en gammel lastebil, bruker 6 timer. De starter i hver sin by og kjører mot hverandre. Hvor lang tid tar det før de møtes?

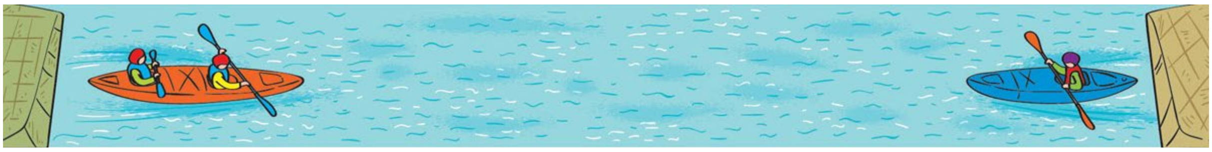
Hva er felles for denne oppgaven og oppgaven i a)?
Kan modellen over brukes for å løse denne oppgaven også?
Løs oppgaven.

6.19

a Les tekstoppgaven.

Det tar 28 sek for en kano med 1 person å krysse en kanal, mens det tar 21 sek for en kano med 2 personer. De to kanoene starter samtidig fra hver sin side av kanalen. Hvor lang tid tar det før de møtes?

Lag et uttrykk som viser hvor lang tid det tar. Finn verdien til uttrykket og svar på spørsmålet.



b Hva må endres i oppgaveteksten hvis svaret skal være gitt ved verdien til dette uttrykket?

$$1 : \left(\frac{1}{45} + \frac{1}{36}\right)$$

Lag en oppgave og svar på spørsmålet.

c Lag en oppgave om to objekter som beveger seg mot hverandre og som kan løses ved hjelp av dette uttrykket:

$$1 : \left(\frac{1}{40} + \frac{1}{24}\right)$$

La en medelev løse oppgaven.

6.23

a Sammenlikn tekstoppgavene. Hva er den vesentligste forskjellen mellom dem?

I For å fylle vann i et basseng, kan man bruke to ulike slanger. Den ene fyller bassenget på 14 min, mens den andre bruker 70 min. Hvor lang tid tar det å fylle bassenget hvis begge slangene brukes samtidig?

II To båter starter samtidig og kjører mot hverandre fra motsatte sider av en innsjøen. De møtes etter 10 min. Det tar 14 min for ene båten å krysse hele innsjøen. Hvor lang tid tar det for den andre?

Løs oppgavene trinn for trinn.

b Hvilket av disse uttrykkene kan brukes for å finne svaret i oppgave I)? Hvilket passer til oppgave II)? Begrunn.

$1 : \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14}\right)$ $1 : \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right)$ $1 : \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{70}\right)$

c Hvilken av oppgavene i a) likner denne på?

Hvis to pumper står på samtidig, tar det 3 timer å pumpe vannet ut av et basseng. Det vil ta 4 timer for den ene pumpen å gjøre jobben alene. Hvor lang tid vil det ta for den andre?

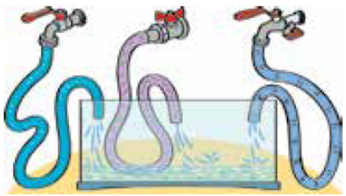
Løs oppgaven.

6.30

a Sammenlikn tekstoppgavene og løs dem.

i) Nadia kan gjøre en jobb på 12 timer, mens Fredrik kan gjøre den samme jobben på 6 timer. Hvor lang tid vil det ta hvis de gjør jobben sammen?

ii) For å fylle vann i et akvarium, kan man bruke tre ulike kraner. Med den første kranen tar det 12 min å fylle akvariet. Med den andre tar det 6 min, og med den tredje tar det 4 min. Hvor lang tid vil det ta hvis alle kranene står på samtidig?



b Hva må endres i oppgave II) hvis svaret skal være gitt ved verdien til dette uttrykket?

$$1 : \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right)$$

Lag en ny tekstoppgave og løs den.

c Sammenlikn denne oppgaven med de forrige.

Tre ulike maskiner lager samme type vare. For å lage et bestemt antall av varen bruker den første maskinen 18 t, den andre 12 t og den tredje 9 t. Hvor lang tid vil det ta å lage det samme antallet hvis de tre maskinene jobber samtidig?

Løs den nye oppgaven.