Utdrag fra klasserommet – matematiske samtaler med elever

Samtale 1
Tema: Proporsjoner med et ukjent tall (til oppgave 4.1)

På skjermen/tavlen: $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{6}$ $\frac{12}{15}$ $\frac{9}{12}$ $\frac{8}{10}$ $\frac{10}{15}$

Lærer: Hva kaller vi dette?
Elever: – Brøker.
– Ekte brøker.
– Forhold.
Lærer: Alle svarene er riktige. Siden vi skal fortsette å jobbe med forhold i denne time, la oss kalle dem forhold. Se på disse forholdene. Ser dere noen sammenheng mellom dem?
Elev: Jeg ser to like forhold: $\frac{3}{4}$ og $\frac{9}{12}$.

De fleste elevene er enige.

Lærer: Hvorfor mener dere at disse forholdene er like?
Elever: – Hvis vi forkorter brøken $\frac{9}{12}$, får vi $\frac{3}{4}$.
– Hvis vi multipliserer telleren og nevneren i $\frac{3}{4}$ med 3, får vi $\frac{9}{12}$.
– De er likeverdige brøker.
– Ja, vi kan skrive en proporsjon med disse brøkene.
Lærer: Er alle enige i dette? … Så skriv ned proporsjonen i ruteboken din!
Alle skriver: $\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$. [**Motta og beholde læringsaktivitet**]

Lærer: Se nå på de andre forholdene. Klarer dere å lage flere proporsjoner?
De fleste skriver to proporsjoner til: $\frac{4}{6}=\frac{10}{15}$ og $\frac{12}{15}=\frac{8}{10}$

Lærer: Kan dere forklare for meg hvordan dere vet at dette er proporsjoner?
Elever: – Jeg forkortet brøken $\frac{4}{6}$ og fikk $\frac{2}{3}$. Så forkortet jeg $\frac{10}{15}$ og da fikk jeg også $\frac{2}{3}$.
Derfor er disse brøkene like, og proporsjonen er sann.
– Jeg utvidet brøken $\frac{8}{10}$ med 1,5 og fikk $\frac{12}{15}$.
Heidi: – Jeg kryssmultipliserte: $4 \cdot 15 = 6 \cdot 10$. Det er samme verdi på begge sider, derfor er proporsjonen sann.
[**Kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig**]

Lærer: Så flott at dere kom med forskjellige bevis. Vi skal bruke alle disse bevisene i dag. Nå skal dere få en annen oppgave av meg. Se på skjermen. [**Skape interesse, spenning**]

På skjermen: $\frac{3}{8}=\frac{}{24}$

Lærer: Hva står det her? Kan dere lage en oppgave som passer til dette? [**Ta hensyn til de retningene som læreren valgte da det nye stoffet ble presentert**]
Elever: – Det mangler et tall i proporsjonen.
– Kanskje det ikke er en proporsjon?
– Jo, det er et likhetstegn der, så det er to forholdene som er like. Derfor er det proporsjonen.
– Det er en proporsjon der et av tallene er visket ut.
– Jeg vet: Vi må finne tallet som mangler!

Kasper: – Jeg vet hva det skal være – det skal være 9! Kan jeg få forklare?
[**Å bli enige og komme til en felles løsning gjennom samarbeid**] [**Skape selvstendig kunnskap**]

Lærer: Greit, Kasper, fortell oss hvorfor du mener at tallet som mangler skal være 9.
Kasper: Jeg la merke til at nevneren 8 i proporsjonen er blitt 3 ganger så stor. Da må telleren også være 3 ganger så stor, og da blir det 9.

Alle er enige.

Lærer: Jeg er også enig med Kasper sin løsning. Han brukte kunnskap om likeverdige brøker. Men jeg vil gjerne høre en annen løsning. Jeg vil gjerne spørre deg, Heidi. Hvordan var det nå du viste at den *første* proporsjonen var sann?
Heidi: Jeg kryssmultipliserte.
Lærer: Det står fortsatt her på tavlen: $4 \cdot 15 = 6 \cdot 10$. Nå har jeg et spørsmål til dere: Kan vi bruke kryssmultiplikasjon for å finne det ukjente tallet i proporsjonen $\frac{3}{8} = \frac{}{24}$?

Heidi: Vi kan sette produktet av de ytterste tallene og produktet av de midterste tallene lik hverandre. Men jeg vet ikke hvordan vi kan skrive det når vi mangler det ene tallet… [**Bygge resonnement ved å forbinde enkle vurderinger av et objekt, dets struktur, egenskaper og relasjoner**]

Lærer: Er det noen som kan hjelpe Heidi?
Sander: Jeg foreslår å lage en likning. Kan jeg få vise?
Lærer: Vær så god, Sander.

Sander: Istedenfor den tomme plassen skriver jeg x (*skriver*): $\frac{3}{8} = \frac{x}{24}$. Nå har vi fått en likning.

Elever: – Det var nå en litt rar likning…
– Hvordan skal vi løse den?

Lærer: Spør dere meg? Dere bør heller komme med forslag selv. [**Skape selvstendig kunnskap**]
Elev: – Vi kan kryssmultiplisere.
Lærer: Jeg er enig. La oss gjøre det! [**Planlegge handling i samsvar med oppgaven**]

Elevene jobber. Etter 1–2 minutter ber læreren noen elever komme frem til tavlen. Alle kryssmultipliserer riktig og får svaret $x = 9$. Kasper rekker opp hånden, og læreren gir ham ordet.

Kasper: Jeg mener fortsatt at min måte var enklere. Hvorfor må vi skrive så mye når vi ser med en gang at telleren må ganges med 3?
Lærer: Jeg syns at spørsmålet til Kasper er veldig interessant. Jeg vil gjerne at dere svarer på dette. Kasper så svaret med en gang, og det var riktig. Er det lurt å skrive så detaljert etterpå – det er kanskje lett å gjøre feil da?
Elever: – Jeg er enig med Kasper: Hvis den kan løses enklere, hvorfor gjøre det så komplisert?
– Jeg tror at det er lurt å ha en generell regel – så er du sikker på at du ikke tar feil.
– Jeg tror at man må tenke seg om i hvert tilfelle. Hvis man ser løsningen med en gang – hvorfor skrive så mye? Hvis ikke, så er det greit å ha en generell regel…
[**Orientering mot mangfoldighet/allsidighet i metoder for å løse oppgaver**]

Lærer: Jeg syns dere alle har rett på hver deres måte, og jeg sier som jeg alltid sier: velg den måten du liker best. La oss se på enda en proporsjon med et ukjent tall. Kan dere løse denne?

(*Skriver på tavlen*): $\frac{15}{36} = \frac{10}{y}$

Elevene jobber. Læreren går rundt og ser at de bruker ulike strategier.

Lærer: La oss diskutere strategiene dere har brukt. Vi begynne med deg, Oskar.

Oskar: Jeg syns ikke det var noen vits å bruke kryssmultiplikasjon her. Jeg la nemlig merke til at telleren i den andre brøken er 1,5 ganger så stor som telleren i den første. Derfor må y være 1,5 ganger så stor som 36. Altså $1{,}5 \cdot y = 36$ som gir oss $y = 36 : 1{,}5$, altså $y = 24$.
Emilie: Jeg fikk samme svar, men jeg gjorde slik (*skriver*): $15y = 36 \cdot 10$. Da blir y lik 24.
Stian: Jeg la merke til at $\frac{15}{36}$ kan forkortes med 3. Da får vi $\frac{5}{12}$. Nå får vi en enklere proporsjon (*skriver*): $\frac{5}{12} = \frac{10}{y}$. Etterpå tenkte jeg som Oskar: Telleren 10 er dobbelt så stor som 5. Derfor må y være dobbelt så stor som 12.
[**Å bli enige og komme fram til en felles løsning**]

Lærer: Så flott at dere hadde løst proporsjonen på ulike måter. Det blir jeg alltid glad for.
[**Lærer viser begeistring**]
Foreløpig har vi jobbet med veldig enkle proporsjoner. Framover skal vi jobbe med noen som er mye mer kompliserte, og som alltid forventer jeg at dere vil komme med noen interessante tanker og løsninger. La oss i mellomtiden løse følgende proporsjoner – du kan selv velge hvilken strategi du vil bruke.

På skjermen/tavlen:

a) $\frac{x}{4} = \frac{7}{2}$ b) $x : 13 = 4{,}5 : 1{,}5$ c) $\frac{6}{x} = \frac{9}{7{,}5}$ d) $\frac{4}{3} = \frac{0{,}5}{x}$ e) $1 : 1{,}6 = x : 24$

Samtale 2

Tema: Subtraksjon av hele tall (innføring, til oppgave 8.16)

På skjermen/tavlen: 15 8 –6 0 –13 –12

Lærer: Se på tallene i rammen. Hva kan dere si om dem?
Elever:
– Det er hele tall.
– Det er to positive tall, tre negative og null.
– Jeg kan sammenlikne disse tallene og lage en kjede av ulikheter.

Lærer: Det var bra. Husker dere hva vi gjorde med hele tall i forrige time?
Elever:
– Vi adderte dem.
– Vi la sammen tall med samme fortegn og tall med ulike fortegn.
– Vi laget en algoritme for hvordan vi legger sammen tall med samme fortegn og tall med ulike fortegn.

Lærer: Flott! Nå skal dere lage summer med tall fra rammen. Dere som sitter her (*viser*) lager summer der leddene har samme fortegn, og dere som sitter her (*viser*) lager summer der leddene har ulike fortegn. Sett i gang!

Elevene jobber. Læreren går rundt og observerer at flertallet får til oppgaven.

Lærer: Se nå på disse to summene (*skriver på tavlen*): $8 + (-12)$ $-13 + (-6)$
Hva er forskjellen mellom summene?
Elev: I den første har tallene som legges sammen ulike fortegn. I den andre tall har de samme fortegn.
Lærer: Finn verdiene til summene.

De fleste elevene finner riktige verdier: $8 + (-12) = -4$ $-13 + (-6) = -19$

Lærer: Jeg ser at dere har forstått addisjon av hele tall. Da har jeg en ny oppgave til dere: Foreslå noen dagligdagse situasjoner som passer til disse likhetene.
Elisabeth: Jeg liker best å bruke temperatur som eksempel. For den første likheten passer f.eks. dette: En dag var temperaturen 8°. Om natten sank temperaturen med 12 grader. Likheten viser oss at det var 4 kuldegrader den natten.

Benjamin: Jeg kan lage et eksempel til den andre likheten som handler om å låne penger: Jeg lånte penger for å kjøpe en sjokolade til 13 kr og en bolle til 6 kr. Hvor mye lånte jeg?

De andre elevene er enige. Noen kommer med andre forslag.

Lærer: Det er bra! Det vi har gjort til nå var «trening». Hovedmålet vårt for i dag er se på en ny regneoperasjon for hele tall.
Elever: Er det subtraksjon?
Lærer: Ja, selvfølgelig er det det, siden subtraksjon… hjelp meg med å avslutte!
Elever: – … henger sammen med addisjon.
– … er den motsatte regneoperasjonen til addisjon.
– Når vi kan addere hele tall, er det lett for oss å lære å subtrahere!
Lærer: Jeg er enig. Se først på skjermen – les og sammenlikn oppgavene.

På skjermen:

8.16

a Les oppgavene.

I Vanntemperaturen i en elv endret seg fra +11° til +15°. Hvor mange grader endret temperaturen seg?

II Lufttemperaturen endret seg fra –2° til 5°. Hvor mange grader endret temperaturen seg?

Lærer: Hva er likt for oppgavene?
Elever: – Det handler om temperaturendring.
– I begge tilfellene synker temperaturen.
– Begge oppgavene er enkle.
Lærer: Hva er den vesentligste forskjellen mellom oppgavene?
Elever: – Den første oppgaven handler om vanntemperatur og den andre om lufttemperatur.
– Det er ikke noen negative tall i den første oppgaven, men det er det i den andre.
Lærer: Hvilken regneoperasjon må vi bruke for å løse oppgavene?
Olav: I den første må vi bruke subtraksjon – vi må finne 15 – 11. I den andre…
Lærer: Du virker litt usikker, Olav. Må vi bruke en annen regneoperasjon i den andre oppgaven? La oss hjelpe Olav.
Andrea: Jeg tror vi må bruke subtraksjon der også.
Lærer: Hvorfor tror du det, Andrea?
Andrea: Siden spørsmålet er det samme i begge oppgavene, nemlig «Hvor mange grader endret temperaturen seg?». I sånne tilfeller må vi finne differansen.
Brage: Siden vi må bruke subtraksjon for å løse den første oppgaven, så må vi også bruke subtraksjon for å løse den andre.
Lærer: Er dere andre enige med Andrea og Brage?

De andre elevene er enige.

Lærer: Lag da et uttrykk som hjelper oss med å finne svaret i den andre oppgaven.

De fleste elevene skriver riktig uttrykk, 5 – (–2).

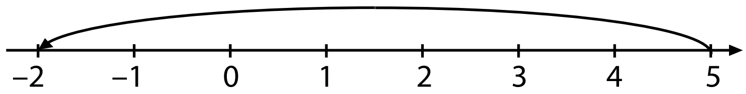
Lærer: Nå må vi lære oss å finne verdien til et slikt uttrykk. Prøv først å gjette hvor mange grader lufttemperaturen har sunket med.

De fleste elevene sier «med 7 grader». Noen sier «med 3 grader».

Lærer: Det er bra at det er delte meninger. Det betyr at dere har begynt å tenke på hvordan vi kan finne svaret. Hva kan vi gjøre for å bli enige om hvilket svar som er riktig?

Elever: – Vi kan tegne et termometer.
– I stedet for å tegne et termometer, kan vi tegne en tallinje – sånne subtraksjoner vil jo ikke alltid handle om temperatur.
Morten: For meg er det helt klart at svaret må bli 7.
Lærer: Jeg er enig med Morten at det er klart, men det kan være fordi tallene er små. Hva om de var mye større? Hva om det var –542 og 2356?
Anita: Så la oss lage en tallinje.

De andre er enige. På skjermen:



Lærer: Er denne modellen er til hjelp?
Morten: Ja! Svaret må være 7! Det var jo det jeg sa! (*Alle er enige.*)
Dina: Denne modellen minner meg om oppgaver vi har sett tidligere der en gresshoppe hopper på tallinjen: Her hopper den fra punktet 5 til punktet –2. Lengden den hopper er lik 7. (*Alle liker denne forklaringen.*)
Lærer: Siden dere liker oppgaven med gresshoppen, foreslår jeg at dere gjør disse to oppgavene.

På skjermen:

i) En gresshoppe hoppet fra tallet –6 til tallet 4 på en tallinje. Hvor mange enheter hoppet den?

ii) En maur krøp fra tallet –11 til tallet –3 på en tallinje. Hvor mange enheter krøp den?

Lærer: La oss sjekke løsningene dere har kommet fram til. Hvem har lyst til å komme på tavlen og vise?

Det er mange som har lyst. Læreren ber noen komme opp. Alle løser oppgavene riktig.

Lærer: Jeg er glad alle forstod, og ikke bare at dere forstod, men også at dere klarer å finne differansen mellom hele tall. Det er allikevel mange spørsmål vi kan stille oss. F.eks.: Er dere ikke overrasket over at alle differansene vi har sett på til nå, har hatt positiv verdi? Er det alltid sånn? Er det slik at verdien til en differanse ikke kan være et negative tall?

Elevene tenker. Det er delte meninger.

Lærer: Fint at ingen av dere spurte meg om det riktige svaret på spørsmålet.
Elever: Vi må finne ut av det selv – skape vår egen kunnskap. Det har du sagt mange ganger!
Lærer: La oss prøve å finne svar på dette spørsmålet – først og fremst, la oss prøve å finne ut hvilket fortegn verdien til en differanse kan ha. Siden vi fortsatt har litt tid igjen, se på differansene i disse eksemplene.

På skjermen (uttrykkene er hentet fra oppgave 8.20):

a) 8 – 5	b) 8 – (–5)	c) –4 – (–7)	d) 0 – (–6)
5 – 8	–5 – 8	–7 – (–4)	–6 – 0

Lærer: Hva er likt, og hva er ulikt for differansene i hvert punkt? Vi har ikke nok tid til at dere kan svare nå – dere må tenke på det hjemme. I neste time diskuterer vi grundig det dere kommer fram til. Jeg vil også at dere gjør følgende viktig oppgave hjemme.

Læreren henviser til oppgave 8.16 e) i grunnboken:

e **i)** Finn to positive tall med differanse lik 15.

ii) Finn et positivt og et negativt tall med differanse lik 26.

iii) Finn to negative tall med differanse lik 100.

Skriv ned likhetene du fikk.

Lærer: En ting helt til slutt: Tenk over hva som kan gjøres med differansene for at verdiene skal bli de motsatte tallene til de som står her, dvs. –15, –26 og –100.

Samtale 3

Tema: Lineær sammenheng (innføring, til oppgave 14.1)

Lærer: I dag skal vi begynne med et nytt og veldig viktig emne. For å forstå bedre hva det dreier seg om, skal vi begynne med en oppgave som dere sikkert vil syns er veldig enkel. Se på skjermen!

På skjermen:

14.1

a I en butikk koster eplene 2 kr per stk.

Hvor mye må du betale hvis du:

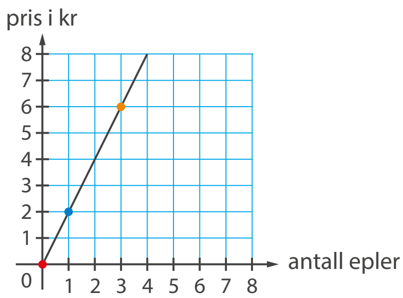
i **kjøper 1 eple?** ii **kjøper 3 epler?** iii **ikke kjøper noe?**

Elever: – Dette er lett!
– Oppgaven handler om en proporsjonal sammenheng.
– Vi har jobbet mye med slike oppgaver.

Lærer: Da bør dere raskt kunne svare på spørsmålene!

Alle elevene finner riktig svar, og noen av elever (etter lærerens valg) skriver svarene på tavlen.

Lærer: Se på skjermen igjen! Hva ser dere her?



Elever: – Et koordinatsystem, og det er en rett linje der.
– Det står ikke x på førstaksen, det står «antall epler».
– Ja, og på andreaksen står det ikke y, men «pris i kr».

Lærer: Ta en nærmere titt: Er det noen sammenheng mellom det som er tegnet i koordinatsystemet og oppgaven vi så på nå nettopp?

Eirik: La meg gjette! På linjen ser vi løsningene fra i sted: F.eks. vi kjøper 1 eple og betaler 2 kr.

Lærer: Hvor får du tallene 1 og 2 fra?

Eirik: Siden linjen går gjennom punktet med koordinater (1, 2), det er det blå punktet! Det betyr at vi kjøper 1 eple og betaler 2 kr.

Sandra: Og hvis vi kjøper 3 epler, må vi betale 6 kr så klart!

Lærer: Hva med punktet med koordinater (0, 0) – hva forteller det oss?

Elever: At vi ikke kjøper noen ting – da betaler vi heller ingenting. Så enkelt er det!

Lærer: Hva om vi tar et eksempel som oppgaven i sted ikke spurte om. Kan dere ved å se på linjen i koordinatsystemet si hva man må betale for 2 epler?

Stine: Jeg tror jeg vet – kan jeg få vise?

Lærer: Greit, Stine, kom opp og vis!

Stine: Vi ser her at (2, 4) ligger på linja. *(Peker på punktet med koordinater (2, 4).)* Det betyr at 2 epler koster 4 kr.

Lærer: Hva tenker dere andre om det? Er dere enige med Stine?

De andre elevene er enige.

Lærer: Dette tok dere lett. La oss sette ord på det som er tegnet i koordinatsystemet. Er det noen som vet hva vi kaller en slik linje eller kurve i et koordinatsystem?

Ingen vet.

Lærer: Det kalles en graf. Dere har kanskje sett eksempler på grafer uten å ha visst hva det heter. En graf trenger forresten ikke være en rett linje. Se her!

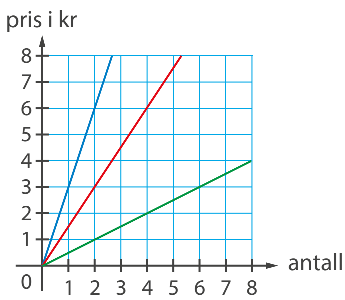
Lærer viser bilder med grafer av temperaturendring, valutakurser o.l., og elevene bekrefter at de har sett liknende bilder før.

Lærer: Nå har jeg et spørsmål til dere: For alle disse grafene er det slik at den ene størrelsen er avhengig av den andre, ikke sant?
Elever: Jeg skjønner ikke hva du mener.
Lærer: Tenk over dette – gjennomsnittstemperaturen en dag, vil være avhengig av hvilken dag vi ser på, vil den ikke?
Elever: Å ja, sånn ja. Jo!
Lærer: Hvilken størrelse er avhengig av hvilken på grafen vår?
Daniel: Det er prisen som avhengig av hvor mange epler vi kjøper.

De andre elevene er enige.

Lærer: La oss se på noen andre grafer som viser en sammenheng mellom pris og antall kjøpte varer.

På skjermen:



Lærer: Hva slags informasjon om prisene kan vi få fra disse grafene? For det første – hvor mange varer er det snakk om?
Elever: – Tre, siden det er tre grafer!
– Den blå grafen må stå for den dyreste varen og den grønne for den billigste.
Lærer: Klarer dere å finne ut hva varene koster per stykk? Hvordan kan vi finne ut det fra grafene?
Albert: Det er lett: Vi må finne et punkt der grafen går gjennom et kryss i rutenettet. F.eks.: den blå grafen går gjennom punktet (1, 3). Derfor må 1 stykk av den varen koste 3 kr.
Lærer: Er de andre enige med Albert?
Elever: – Ja – jeg tenkte også sånn!
– Jeg også.
Lærer: Vel, da venter jeg på svar angående de andre grafene. La oss be Emilie fortelle oss hvor mye en vare på den grønne grafen koster.
Emilie: For det første er det den billigste varen, siden grafen er minst bratt. Hvor mye varen koster… Jeg ser et punkt på grafen med koordinater (2, 1). Jeg tror at siden 2 stykk koster 1 kr, så da må 1 stykk koste en halv kr…

Lærer: Hvem er enig med Emilie? (*Nesten alle er enige.*) Da er det bare den røde grafen som er igjen. Hvem vil si hva prisen på den varen er?

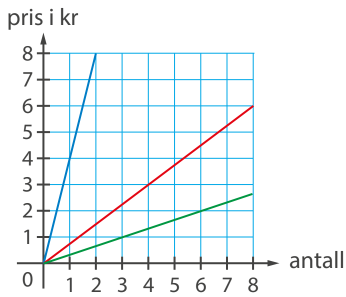
Noen elever rekker opp hendene, men mange syns det er vanskelig. Læreren ber Leo svare.

Leo: Jeg la merke til at grafen går gjennom punktet (2, 3). Det betyr at 2 stykk koster 3 kr, og 1 stykk… (*Nøler.*)
Elever (*fra plassene sine*): – En og en halv kr.
– Vi må dele 3 med 2. Det er ikke vanskelig – svaret er 1,5 kr.

Flertallet er enig.

Lærer: Jeg ser at dere er ganske flinke allerede til å lese av enkle grafer. Vi har fortsatt en lang vei å gå, og vi har fremdeles mye å lære om grafer. Hjemme vil jeg at dere skal se på disse grafene (*viser på skjerm*) – jeg skal dele ut en kopi ganske snart.

På skjermen:



Lærer: Dette er leksen til i morgen: Finn ut hva varene koster per stykk. Velg ut en av grafene og lag en oppgave som passer til. Vi skal diskutere oppgaven i neste time. La oss nå gå videre til neste emne.

Noen siste kommentarer og råd til læreren

- Spør ofte: Hva tenker du? Hva mener du?
  Man bør vise at man setter stor pris på at elevene har sin egen mening.
- Omformuler oppgaven dersom den er uklar for eleven eller be andre elever om å gjøre det.
- Be gjerne elevene selv gjenfortelle med egne ord hva oppgaven dreier seg om. (Dette gjelder spesielt for tekstoppgaver.)
- Man kan gjerne tenke at timen starter når klokken ringer, men i praksis starter den når man har fanget elevenes interesse.
- Når dere går gjennom et nytt emne, før dere begynner å forklare, prøv å skape interesse hos elevene slik at de selv ber om en forklaring.
- Tenk over om spørsmålene som stilles i timene er interessante for elevene. Er man genuint ute etter elevenes tanker eller ønsker man bare å sjekke hukommelsen deres eller om man har elevenes oppmerksomhet?
- Det er ikke så vanskelig å rette elevfeil. Det er langt vanskeligere å lære en elev å ikke være redd for å gjøre dem.