Utdrag fra klasserommet – matematiske samtaler med elever

Samtale 1
Tema: Hvordan finnes felles nevner? (til oppgave 1.3)

Bakgrunn:
I timen før har elevene jobbet med addisjon og subtraksjon av brøker med like nevnere (oppgave 1.1). Læreren valgte i tillegg å repetere likeverdige brøker og sammenlikning av brøk med ulike nevnere (finne felles nevner), selv om dette ikke stod i boken.

På skjermen/tavlen:

i) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ ii) $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ iii) $\frac{1}{4}+\frac{1}{6}$ iv) $\frac{1}{10}+\frac{1}{15}$

Lærer: Kan noen minne meg om hva vi gjorde sist gang?
Elever: - Vi jobbet med addisjon og subtraksjon av brøk.
- Vi gjorde om brøker også og fant likeverdige brøker.
- Vi utvidet brøker.
- Vi fant fellesnevner.
Lærer: Så flott at dere husker. Prøv nå å finne verdiene til disse summene.

Elevene begynner å jobbe, læreren går rundt og finner at de fleste gjør rett.

Lærer: La oss diskutere det dere har kommet fram til. Men svar først på følgende spørsmål: I hvilket tilfelle var det enklest å legge sammen brøkene?
Elever: - I første.
- Der er det små tall.
- Og felles nevner er lik én av nevnere, nemlig 4.
Lærer: Og i de andre tilfellene?
Tore: Der var det også lett. I ii) er felles nevner 12, i iii) er det også 12 og i iv) er det 60.
[Kunne analysere og identifisere vesentlige og uvesentlige egenskaper]

Noen elever ser ut til å være uenig og rekker opp hendene.

Lærer: Tore, du ser at noen protesterer. Kan du fortelle oss hvorfor du valgte akkurat disse tallene til fellesnevner?
Tore: I punkt ii) fant jeg 12 siden 12 er delelig med 3 og 4. Det samme gjelder i punkt iii). I iv) er 60 delelig med både 10 og 15.
[Dannelse av selvstendighet]

Læreren gir ordet til elever som rekker opp hendene.

Elever: - Jeg er enig med Tore når det gjelder de tre første punktene. Men i iv) tror jeg at fellesnevneren er 30, ikke 60, siden 30 også er delelig med 10 og 15!
- Jeg tror at vi kan bruke både 30 og 60, men 30 er best siden 30 er mindre enn 60.
- I forrige time sa vi at vi må prøve å finne minste felles nevner for brøkene!
Tore: Jeg er enig. Jeg syns ikke at det jeg gjorde var feil, men jeg er enig i at vi bør prøve å finne den enkleste løsningen.
Lærer: Fint at dere kom til enighet. Flott, Tore, at du var en av de første som fant svarene. Og kjempebra av dere andre som fant en enklere måte å løse oppgaven på.
[Å bli enig og komme til en felles løsning gjennom samarbeid]
Da har vi kommet til det som er hovedmålet for denne timen: Hvordan kan vi finne den **minste** fellesnevneren? Forresten, hvordan fant dere fellesnevnerne – det glemte jeg å spørre dere om det.
[Aktivisere gammel kunnskap]

Elever: - Jeg bare fant dem.
- Det var lett siden tallene var så små.
- Jeg gjettet.

Lærer: Det er ikke alltid det er så lett å gjette, er det vel? La oss se på noen andre summer. Prøv å gjette hva felles nevner er her.
[Motta læringsaktivitet]

På skjermen/tavlen: $\frac{1}{84}+\frac{1}{105}$ $\frac{1}{144}+\frac{1}{108}$
[Skape selvstendig kunnskap]

Dette er utfordrende for elevene. Noen foreslår å multiplisere nevnere, noen oppgir tall tilfeldig.

Lærer: Denne gangen vil jeg gi dere svaret: I det første eksempelet er fellesnevneren 420 og i det andre er den 432.
Elever: Hvordan fant du ut det?
Lærer: Det er min hemmelighet foreløpig. Jeg vil at dere skal finne ut om jeg har rett. Etterpå skal jeg avsløre hemmeligheten min.
[Lærerens entusiasme]
Elever: - Du har allerede avslørt mange matematiske hemmeligheter.
- Men ofte har vi gjettet hva hemmeligheten var, før du har sagt det!
Lærer: Jeg ber dere altså sjekke om jeg fellesnevnerne jeg har funnet er riktige. Hvordan vil dere gjøre det?
Elever: Jeg vet. Vi må dele tallet ditt med de to nevnerne. Hvis divisjonen går opp, så **er** det en fellesnevner.

Elevene finner ut at begge tallene passer – de er fellesnevnere.

Lærer: Nå skal jeg fortelle dere hvordan dere kan finne fellesnevner. La oss se på et enkelt eksempel først: $\frac{1}{24}+\frac{1}{18}$. Se på her.

På skjermen/tavlen: 18, 36, 54, 72, 90
24, 48, 72, 96

Lærer: Hva er dette?
Elever: Tallfølger.
Elise: Jeg tror at det er spesielle tallfølger – vi jobbet med sånne i 5. klasse.
[Aktivisere gammel kunnskap]
Lærer: Hva er spesielt med disse tallfølgene?
Elise: I den første øker tallene med 18. I den andre øker de med 24.
Lærer: La oss sjekke om Elise har rett.

Alle er enige med Elise. [Vurdere om svaret er rett]

Lærer: Hvordan kan disse tallfølgene hjelpe oss med å finne en felles nevner?
Elever: Jeg vet! Fellesnevneren er 72, for 72 er med i begge tallfølgene!
Lærer: Hvorfor er dette tallet felles nevner?
[Skape interesse og nysgjerrighet]

Det oppstår en liten pause. Noen elever rekker opp hendene. Læreren gir ordet til Frida.

Frida: Jeg ser at tallene i hver tallfølge er delelig med det første tallet. Sånn blir det alltid når vi lager tallfølger på denne måten.
Lærer: Frida har rett.
Frida: Det første tallet som er med i begge tallfølgene blir felles nevner, for det tallet vil være delelig med både 18 og 24. Her er det 72.
Lærer: Jeg tror også at 72 er en felles nevner. Men… er dere sikker på at dette er den **minste**

fellesnevneren?
Elever: - Det er i hvertfall det første tallet som er med i begge tallfølgene.
- Da må det også være det minste!
- Ja, for tallene blir jo bare større og større.

Alle er enige. [Å bli enige og komme til en felles løsning gjennom samarbeid]

Lærer: Nå vil jeg at dere skal legge sammen $\frac{1}{24}$ og $\frac{1}{18}$. Det bør gå greit nå som vi har funnet ut at 72 er fellesnevner, men jeg er her for å hjelpe hvis noen står fast. *(Lærer hjelper noen med å utvide brøkene og observerer ellers at de fleste kommer fram til rett svar* $\frac{7}{72}$*.)* Hvem vil vise dette på tavlen?

Det er mange som vil. Læreren velger to (ikke de flinkeste).

Lærer: Kan denne brøken forkortes?
Elever: - Nei, 72 er ikke delelig med 7.
- 72 og 7 er relativt primiske tall.
Lærer: Før vi går videre, la oss tenke på hvilke andre tall som kunne vært felles nevner for brøkene $\frac{1}{24}$ og $\frac{1}{18}$? La meg gi dere et hint – legg merke til mønsteret i de to tallfølgene.
Elever: - Jeg vet – vi kan fortsette videre med tall og finne det neste som er felles.
- Jeg har allerede funnet det – det er 144!
- 144 er delelig med både 24 og 18. [Skape analogi]
Lærer: Flott! Prøv nå å gjette på hvilken brøk vi ville fått som svar hvis vi hadde brukt 144 som felles nevner.
Elever: Vi ville fått en brøk med 144 som nevner.
Harald: Vi ville fått $\frac{14}{144}$.
Elever: Enig.
Lærer: Hvorfor tror du det, Harald?
Harald: Vi måtte fått en brøk med samme verdi, og $\frac{14}{144}$ er lik $\frac{7}{72}$. Den kan forkortes med 2.
Lærer: Hva slags oppgaver bør vi jobbe med videre nå, syns dere? Som handler om å finne felles nevner…?
Elever: - Vi bør øve på addisjon av brøk.
- Vi fant felles nevner da vi sammenliknet brøker. Kanskje vi bør repetere det?
- Da vi sammenliknet brøker i fjor fant vi felles nevner på en annen måte...
- Jeg husker – vi primtallsfaktoriserte! [Orientering mot mangfoldighet/allsidighet i metoder for å løse oppgaver]

Lærer: Dere har alle rett. Vi skal jobbe med dette i timene framover. Nå vil jeg foreslå at dere legger sammen noen brøker… (*Læreren gir dem flere oppgaver.*)

Samtale 2

Tema: Dele et tall med en stambrøk (til oppgave 5.1)

I denne episoden skapes en kognitiv konflikt som elevene må løse. Når vi deler et tall med en stambrøk, oppstår det et problem og et paradoks. Svaret blir ikke mindre enn dividenden, slik all tidligere erfaring har vist og slik selve ordet «dele» antyder. Tvert imot – svaret blir større. Vi viser et utdrag fra klasserommet der elevene møter et paradoks, diskuterer paradokset ved å gå i dybden, løser konflikten og som konsekvens kommer ut på et høyre kunnskapsnivå.

På skjermen/tavlen: 24 : 3 60 : 4 80 : 5 5 : 2

Lærer: Hva ser dere her?

Elever: - Kvotienter.
- Skal vi regne ut hva det blir…?
- Det er lett. Sånne oppgaver jobbet vi med for lenge siden…
- I det siste stykket får vi en rest!
- Men vi kan skrive svaret som en brøk – vi jobbet med sånne oppgaver for ikke så lenge siden. Svaret er fem todeler!
- Eller vi kan skrive som et blandet tall: to og en halv – vi har nettopp jobbet med slike stykker.

Lærer: Det ser ut til at dere ikke bare har svart på spørsmålet mitt, men at dere også har forstått hva som er tema for denne timen. I dag skal vi jobbe med divisjon, men vi skal ikke dele med et helt tall. Vi skal lære oss å dele med en brøk. La oss først lese disse to tekstoppgavene.

På skjermen:

5.1

a Sammenlikn tekstoppgavene.

I To brødre fisket. Den eldste fikk 6 fisker, mens den yngste fikk 3. Hvor mange ganger større var fangsten til den eldste broren?

II To søstre drakk melk. Den eldste drakk 2 glass, mens den yngste drakk et halvt. Hvor mange ganger mer melk drakk den eldste søsteren?

Lærer: Jeg ber dere om å sammenlikne oppgavene og svare på dette spørsmålet: Må vi bruke den samme regneoperasjonen for å løse de to oppgavene?
[Skape interesse, spenning]
Anne: Den første oppgaven er lett. Vi må bruke divisjon, og svaret er 2!
Eirik: Vi må bruke divisjon på den andre også, men hva blir svaret… *Eleven opplever vanskeligheter.* [Skape kognitiv konflikt]

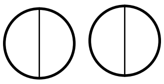
Lærer: Anne og Eirik, kan dere komme opp på tavlen og vise hvordan dere tenkte?

Anne skriver 6 : 3 = 2. *Eirik skriver* $2 : \frac{1}{2} =$ *Deretter stopper han opp – det har oppstått et problem.*
Lærer: Er dere enige med Anne sin løsning? *(Alle er enige.)* Hva med Eirik – har han rett? *(De fleste er enige.)* Da må vi hjelpe Eirik med å komme seg videre. Tenk over hvordan vi kan dele 2 med $\frac{1}{2}$.
Etter en stund rekker de fleste opp hånden.

Elever: - Jeg tror at det må bli 1 …
- Nei, det kan i hvertfall ikke være riktig – 2 delt med 2 er jo 1, og her deler vi ikke med 2, vi deler med et annet tall!
- Jeg tror at det blir et tall som er mindre enn 2.
- Jeg tror det er motsatt – det blir et tall som er større enn 2.
- Eller kanskje vi ikke får noe i det hele tatt…, altså, jeg tror at det ikke er mulig å dele med en brøk…
- Ja, det er jo ikke mulig å dele med null! Kanskje det er det samme her?
- Jeg tror at det blir et tall som er større enn 2, men jeg klarer ikke å forklare hvorfor.
- Nei, når vi deler, må vi jo få noe som er mindre.

[Tillate å ha ulikt syn] [Skape selvstendig kunnskap]
Lærer: Flott at dere har kommet med så mange ulike forslag. Nå må vi finne ut hvem som har rett og hvorfor.
Elever: Da forstår vi hvordan vi kan dele med brøk!

Lærer: Se på skjermen.

På skjermen vises følgende modell: 

Lærer: Hva har denne modellen med oppgaven å gjøre?
[Ta hensyn til det som læreren sier og sammarbeide med læreren]
Elever: - Jeg tror at sirklene står for glass.
- Sirklene står for glassene med melk som den eldste søsteren drakk, og en halvpart – det er så mye som den yngste drakk.
Lærer: Enig. Bruk modellen og prøv å svare på spørsmålet i oppgaven.
[Skape selvstendig kunnskap]

Elever: - I et glass er det til sammen 2 halvdeler. Derfor må svaret være 4.
- Men vi må dele 2 med $\frac{1}{2}$ – hvordan kan vi få et tall som er større?
- Det ser ut som om det er mulig…
- Jeg tror jeg vet hvordan vi kan løse problemet. Kan jeg få fortelle?
Lærer: Ja, vær så god, Stine! [Dannelse av selvstendighet og selvtillit]
Stine: Vi vet at vi kan bruke multiplikasjon for å sjekke svaret på en divisjon. Vi kan gange 4 med $\frac{1}{2}$. Hvis vi får 2 til svar, så er det rett.
Lærer: OK – utfør multiplikasjonen.

Elevene ser at $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Elever: - Det må bety at $2 : \frac{1}{2} = 4$.
- Det var rart, men alt stemmer.
- Ja, det var rart!

Lærer: Det stemmer. Det finnes mange paradokser i matematikk. Husker dere hva ordet «paradoks» betyr?
Elever: - Et paradoks er noe som er umulig.
- Det er noe som er rart, uventet.
- Noe som ikke eksisterer.
- Det er en slags selvmotsigelse – noe som motsier det vi vet.
- Som f.eks. at når vi deler, kan vi få noe som er større. [Konflikt]
Lærer: Jeg er enig med dere. Et paradoks er en påstand som tilsynelatende er en selvmotsigelse, men som likevel kan være korrekt. Hva tror dere «å løse et paradoks» betyr?
Elever: - Det betyr å finne svar, å forstå hvorfor det skjer.
- Slik at det ikke er rart lenger.
- Det betyr at vi har funnet grunnen til det som skjer.
Lærer: Mener dere at vi har løst paradokset vårt?
Elever: - Kanskje…
- Vi sjekket svaret med multiplikasjon – alt stemmer.
- Og modellen bekrefter svaret.
[Vurdere om svaret er rett ved hjelp av adekvat og retrospektiv vurdering]
Lærer: Så la oss gå videre. Se på skjermen – der ser dere den nye oppgaven deres.

På skjermen:

b Lag tegninger som kan hjelpe deg med å finne ut hvor mange ganger større:

i 4 er enn $\frac{1}{2}$ ii $1\frac{1}{2}$ er enn $\frac{1}{4}$ iii $\frac{3}{4}$ er enn $\frac{1}{8}$

Lærer: Jeg anbefaler dere å tegne brøkene ved hjelp av sirkler.

Elevene begynner å arbeide. [Passe vanskegrad]
Etter en stund ber læreren 3 elever om å komme fram til tavlen og vise tegningene sine – én til hvert punkt. Alt er gjort rett. De fleste elevene har gjort oppgaven riktig.

Lærer: La oss skrive oppgaven med matematisk språk. Regn ut.

Læreren skriver på tavlen: i) $4 : \frac{1}{2}$ ii) $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$ iii) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$

Lars: Men vi vet svarene allerede! Kan jeg skrive på tavlen?
Lærer: Vær så god, Lars!

Lars skriver: i) $4 : \frac{1}{2} = 8$ ii) $1\frac{1}{2} : \frac{1}{4} = 6$ iii) $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = 6$

Lærer: Er dere andre enige?
Elever: - Ja! [Danne/etablere analogier]
- Jeg kan forklare på en enkel måte hvordan vi deler et naturlig tall med en stambrøk: Vi må multiplisere dividenden med nevneren i brøken.
- Dette var lett!

Fredrik: Jeg har et spørsmål. Kan jeg få spørre om noe?
Lærer: Vær så god og spør, Fredrik.
Fredrik: Jeg tror at svaret blir større hvis vi deler et tall med en ekte brøk. Hvis vi deler et tall med en uekte brøk, så blir svaret mindre… Er det sånn?
Lærer: Forsto alle hva Fredrik spurte om? Jeg synes at dette var et veldig interessant spørsmål som jeg vil at vi skal diskutere i neste time. [Læreren viser begeistring]. Akkurat nå – la oss øve oss på å dele med en stambrøk.

Læreren kommer med en oppgave.

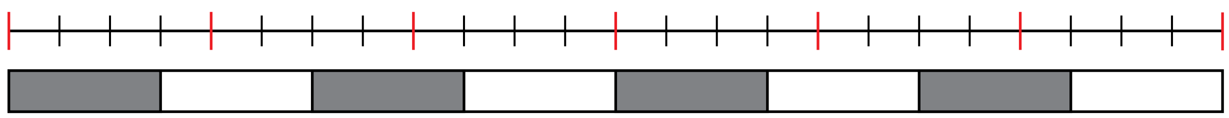
Sluttkommentar:
Når vi sammenlikner tekstoppgavene, legger vi merke til at de er nesten like – det er derfor naturlig at vi må bruke den **samme regneoperasjonen** for å finne svarene. **Men** svaret på den andre oppgaven ser litt rart ut. På den annen side viser modellen som er gitt at man bør forvente dette svaret. Den kognitive konflikten er løst, og elevene har kommet fram til en forståelse av at når vi deler så er det ikke alltid slik at vi får noe som er mindre – svaret kan bli større. Dette fører til ny kunnskap, glede over å ha funnet ut noe, følelser settes i sving…

For å forstå stoffet enda bedre og for å få bekreftet at den kognitive konflikten som ble skapt virkelig er løst, tror vi at det kan være nyttig å inkludere ulike eksempler som viser at en «uventet» likhet som f.eks. $2 : \frac{1}{2} = 4$ er riktig:

1. Svaret på en divisjon kan sjekkes ved hjelp av den motsatte regneoperasjonen – multiplikasjon, dvs. $4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.
2. Geometrisk modell (se oppgave 5.6). Hvor mange linjestykker med lengde cm er det plass til langs et linjestykke med lengde 6 cm? Det er åpenbart at svaret er 24. Det betyr at $6 : \frac{1}{4} = 24$.

3. Hvor mange linjestykker med lengde $\frac{3}{4}$ cm er det plass til langs det samme linjestykket?

   Svaret er 8 – noe som medfører at $6 : \frac{3}{4} = 8$.



Samtale 3

Tema: Hvor mange prosent flere eller færre? (til oppgave 19.9)

På skjermen:
I en skål er det 30 sjokolader og 24 karameller. Hvor mange flere sjokolader enn karameller er det i skålen? Hvor mange færre karameller enn sjokolader er det i skålen?

Lærer: Vi skal starte timen med denne oppvarmingsoppgave. La oss ta det muntlig.
Elever: - Dette var veldig lett! Det er 6 flere sjokolader siden 30 – 24 = 6.
- Og det er 6 færre karameller.
- Vi kan bruke den samme likheten.
Lærer: Enig, dette var en lett oppgave, men så var det jo bare oppvarming. [Aktivisere gammel kunnskap] Nå skal dere lese den neste oppgaven og sammenlikne med den forrige.

På skjermen:
I en skål er det 30 sjokolader og 24 karameller. Hvor mange prosent flere sjokolader enn karameller er i skålen? Hvor mange prosent færre karameller enn sjokolader er i skålen?
[Motta og beholde læringsaktivitet]

Lærer: Hva er likt i oppgavene? Hva er forskjellig?
[Kunne sammenlikne etter gitte kriterier] [Kognitiv konflikt]
Elever: - De har de samme opplysningene – i en skål er det 30 sjokolader og 24 karameller.
- Det er bare spørsmålene som er ulike.
- I den andre oppgaven brukes ordet «prosent».
Lærer: Vi fikk samme svar på spørsmålene i den første oppgaven. Vil vi få samme svar på spørsmålene her også? Hva tror dere?
[Ta hensyn til de nye retningene som læreren valgte]

Elevene er usikre. Det er delte meninger.

Lærer: La oss begynne å løse den andre oppgaven. Som vanlig skal jeg hjelpe dere hvis det trengs. [Skape selvstendig kunnskap] Husk: Oppgaver av type «Hvor mange prosent større er et tall enn et annet» jobbet vi med sist gang, så det burde ikke være noe nytt og vanskelig for dere her. Begynn med det første spørsmålet.

Elevene jobber. Etter et minutt rekker elevene opp hendene.

Lærer: Daniel, fortell oss hvordan du løste oppgaven.
Daniel: Jeg gjorde sånn som vi gjorde forrige gang. Først fant jeg ut hvor mange flere sjokolader det var i skålen: 30 – 24 = 6. Så fant jeg ut hvor mange prosent 6 er av 24: $\frac{6}{24} \cdot 100 = \frac{1}{4} \cdot 100 = 25$.
Svar: Det er 25 % flere sjokolade enn karameller.
Lærer: Er alle enige med Daniel? Lise?
Lise: Jeg skjønner ikke hvorfor du bare ganger med 100. Må du ikke finne ut hvor mange hundredeler $\frac{6}{24}$ er? Det er jo det som er prosent.
Daniel: Men det blir jo det samme.
Lise: Blir det? Hvordan vet du det?
Daniel: Det fant vi jo ut forrige gang. Åja – det er sant, du var jo syk forrige uke.
Lærer: Dette var en interessant diskusjon. Det er kanskje flere som lurer litt på dette – det er jo ganske nytt. *(Flere nikker.)* Nå har vi to forslag her – Daniel foreslår å gange $\frac{6}{24}$ med 100, mens Lise foreslår å finne ut hvor mange hundredeler $\frac{6}{24}$ er. I følge Daniel sin metode er svaret 25 %.
Lærer skriver på tavlen: $\frac{6}{24} \cdot 100 = 25$
Lærer: Hva blir svaret i følge Lise sin metode? Nå vil jeg at dere skal utvide brøken $\frac{6}{24}$ slik at nevneren blir 100.

Elevene går i gang, men ganske snart kommer flere hender i været.

Lærer: Hva fant dere ut? Tobias?
Tobias: Det går ikke! Det finnes ikke noe naturlig tall som vi kan gange 24 med og få 100. Det må være en sånn brøk som ikke kan skrives som et endelig desimaltall.
Lærer: Katrine, du ser ut som om du har noe viktig å si.
Katrine: Jeg vet hva som er problemet – jeg trodde heller ikke det gikk, men så la jeg merke til at det går an å forkorte brøken. Da var det lett.
Tobias: Åja, det glemte jeg.

Tobias og de andre som hadde stoppet opp, fortsetter arbeidet sitt. Etter kort tid rekker de fleste hendene i været.

Lærer: Hvor mange hundredeler ble det?
Elever: - 25.
- Det ble 25 hundredeler.
- Det fikk jeg og!

Lærer skriver på tavlen: $\frac{6}{24} = \frac{25}{100}$

Lærer: Så hva betyr dette? Gir de to metodene samme svar?
Elever: - Ja. Hvis vi ganger $\frac{25}{100}$ med 100, så får vi jo 25.
- Siden $\frac{6}{24}$ har samme verdi som $\frac{25}{100}$, må $\frac{6}{24} \cdot 100$ være lik .

Læreren skriver det siste som en likhet på tavlen. Elevene nikker og er enige.

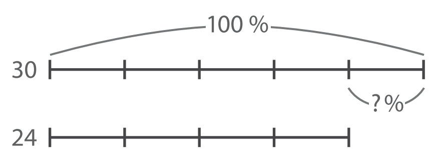
Lærer: Så da har vi løst **det** problemet. Å gange med 100 er bare en kort måte å finne prosenttallet på. Vi trenger ikke å gjøre om til hundredeler først. Men – jeg har et spørsmål til Daniel, Lise og dere alle: Hvorfor delte dere 6 med 24 og ikke med 30?
Daniel: Det var det vi gjorde tidligere – vi delte med det minste tallet…
Lærer: Men hvorfor akkurat det minste tallet og ikke det største? Hva om dere alle husker feil? Det må være mulig å forklare hvorfor det må være slik – er det noen som vil forsøke seg på en forklaring?
Elever: - Fordi spørsmålet er: Hvor mange prosent flere sjokolader enn **karameller** er i skålen? (*Legger vekt på ordet «karameller»*).
- Det er antall karameller er som 100 prosent…
- Vi begynner med 24, og så økes antallet til 30.

[Passe vanskegrad]
Lærer: Er alle med på forklaringene? (*Elevene nikker*.) La oss gå videre til det andre spørsmålet i oppgaven. Kan noen minne meg på hva det var?
Elever: Hvor mange prosent færre karameller enn sjokolade er i skålen?
Lærer: Før dere begynner å regne ut, prøv å gjette svaret: Blir det 25 % her også, eller blir det noe annet?

Elevene har delte meninger.

Lærer: Hva må vi finne ut først?
Elever: - Vi må finne ut hvor mange færre karameller enn sjokolader det var i skålen.
- Det vet vi allerede – det er 6 færre.
- Så må vi finne ut hvor mange **prosent** færre karameller det er…
Lærer (*vegger vekt på*): … enn sjokolade. Sett i gang. [Motta læringsaktivitet]

Mens elevene jobber vises følgende modell på skjermen/tavlen:



Lærer: Hvis du står fast, ta en kikk på denne modellen.

Læreren går rundt og observerer hvordan elevene jobber. Etter noen minutter er de fleste ferdige og rekker opp hendene.

Lærer: Jeg ser at mange er ferdig. Dere skal lov til å fortelle hva dere har gjort, men først vil jeg vite hva dere fikk til svar. *(De fleste sier 20 % færre, noen sier 25 % færre.)*
Lærer: Malin, fortell oss hvordan du tenkte og hva du fikk til svar.
Malin: Først visste jeg ikke helt hva jeg skulle gjøre, men modellen hjalp meg. Jeg tenkte sånn: Først leste jeg spørsmål en gang til: Hvor mange prosent færre karameller enn sjokolader var det i skåen? Det var 6 færre karameller enn sjokolader. Modellen hjalp meg til å skjønne at det er antall sjokolader som er hundre prosent. Det var 30 sjokolader, og 6 av 30 … jeg skrev sånn (*skriver på tavlen*): $\frac{6}{30} \cdot 100 = \frac{1}{5} \cdot 100 = 20$. [Kunne uttrykke seg muntlig og skriftlig]
Lærer: Jeg likte hvordan Malin tenkte. Er det noen som har noe å kommentere eller noe de vil tilføye?
Elever: - Jeg er enig med Malin, jeg tenkte likt…
Lærer: Martin, jeg så at du hadde gjort likt, og du skal få komme på tavlen neste gang. Er flere som har noe de vil si? [Skape selvstendig kunnskap]
Elever: - Jeg gjorde feil først og fikk 25 %, men modellen hjalp meg og nå tror jeg at jeg forstår hvordan sånne oppgaver skal løses.
- Jeg skjønner fortsatt ikke hvordan vi kan vite hva som skal være 100 %...
- Jeg er enig med Malin, men jeg skjønner ikke hvorfor det ikke blir samme svar på de to spørsmålene sånn som det ble i den første oppgaven.

[Ta hensyn til ulike meninger og komme fram til felles løsning]
Elias: Alt dette er jo greit nok, men hva er egentlig vitsen med prosent? Oppgavene blir jo bare vanskeligere…
Lærer: Så interessant at du spør om akkurat det, Elias. For å være helt ærlig så har jeg ventet på det spørsmålet. Det tar for lang tid å svare på dette nå. Jeg tror at når dere får løst noen flere oppgaver, så vil dere selv se nytteverdien av å bruke prosent, og dere vil ikke oppfatte disse oppgavene som rare og vanskelige.

Frida rekker opp hånden, og læreren gir henne ordet.

Frida: Vi lurte jo på akkurat det samme for en stund siden, bare at da gjaldt det desimaltall. Vi lurte på hvorfor man egentlig hadde funnet opp desimaltall – hva som var vitsen med dem. [Skape analogi]
Lærer: Ja, husker dere det? Marit, Jacob og Tobias undersøkte saken nærmere og holdt et foredrag for oss.
Daniel: - Kan vi ikke gjøre det samme med prosent?
Lærer: Det var en god ide! Det må vi gjøre. La oss bestemme hvem som tar på seg oppgaven med å undersøke historien til prosent. [Lærerens engasjement]

Samtale 4

Tema: Å gjøre om fra brøk til desimaltall (til oppgave 15.1)

Neste episode viser at det ikke bare er nyttig, men også nødvendig å gå inn i dybden av et problem.

På skjermen/tavlen: $\frac{3}{4}$ $\qquad \frac{9}{250}$ $\qquad \frac{7}{8}$

Lærer: Se på disse brøkene. Hva tror dere jeg har tenkt å be dere gjøre med dem?
Elever: - Kanskje vi skal gjøre dem om til desimaltall.
- Jeg tror at det er noe annet, for vi har allerede jobbet masse med sånne oppgaver.

Lærer: Dere har begge rett. Først skal vi gjøre disse brøkene om til desimaltall. Da vil vi få vite noe annet som er viktig… La oss starte med å gjøre brøkene om til desimaltall, og jeg vil gjerne be dere å ta med utregning.

Elevene begynner å jobbe. Læreren går rundt og ser om alle har automatisert prosedyren.

Lærer (*ber 3 elever komme til tavlen*): Skriv ned hva dere har gjort. Så skal vi diskutere strategiene deres etterpå.

Elevene skriver på tavlen:

Martin:	*Tuva:*	*Idun:*
$\frac{3}{4}=0{,}75$	$\frac{9}{250}=\frac{32}{1000}=0{,}032$	$\frac{7}{8}=\frac{7\cdot125}{8\cdot125}=\frac{875}{1000}=0{,}875$

Lærer: Har alle gjort det riktig, hva mener dere?
Elever: - Alle fikk i hvertfall rett svar.
- Martin tok ikke med utregning, det gjorde Tuva og Idun.
- Idun tok med mest utregning.
Martin: Hvorfor må vi skrive så mye? Alle vet jo at $\frac{3}{4}$ er lik 0,75!
Lærer: Jeg tviler ikke på at de fleste av dere kan gjøre enkle brøker om til desimaltall i hodet. Men i dag har vi et annet mål. Jeg skal si hva målet er om litt. Men først – la oss be Idun fortelle oss hvordan hun tenkte, siden hun var den som skrev mest detaljert.
Idun: Først fant jeg ut hva jeg måtte gange 8 med for å få en dekadisk enhet. Jeg kan ikke få 10 eller 100, men hvis jeg ganger med 125, så får jeg 1000. Derfor utvidet jeg brøken med 125 og fikk $\frac{875}{1000}$.
Lærer: Hvordan visste du at du «ikke kan få 10 eller 100» – altså at det ikke finnes noen brøk som er likeverdig med og som har nevner 10 eller 100?
Idun: Det går bare ikke. Det har vi sett mange ganger…
Lærer: Er det noen av dere andre som har noe dere vil bidra med?

Flere rekker opp hendene.

Lærer: Vær så god, Daniel.
Daniel: For hverken 10 eller 100 er delelig med 8!
Lærer: Hvordan vet du det? … Prøvde du å dele kanskje…?
Daniel: Ja...
Lærer: Jeg tror at det er på tide å avsløre en stor hemmelighet for dere. Når dere får vite denne hemmeligheten, så vil dere ikke bare klare å gjøre om brøker til desimaltall, men dere vil også kunne si på forhånd om det går… Før jeg avslører hemmeligheten – la oss først prøve å gjøre disse brøkene om til desimaltall.

På skjermen/tavlen: $\frac{2}{3}$ $\frac{5}{6}$ $\frac{7}{15}$ $\frac{3}{14}$

Elever: Det går ikke! Det har vi prøvd på før!
Lærer: Hvorfor går det ikke? Hvorfor er $\frac{2}{3}$ og $\frac{5}{6}$ verre enn de brøkene vi så på i sted?
Elever: De kan ikke omgjøres til en brøk med nevneren 10, 100, 1000, osv.
Lærer: Hvorfor ikke? Hva er problemet?
Elever: De har «dårlige» nevnere.
Lærer: Hva er det som er «dårlig»?

Elevene har vanskelig for å svare.

Lærer: Jeg forstår at det er litt vanskelig for dere å svare på spørsmålet mitt sånn på stående fot. Men det er absolutt viktig for oss å forstå hvorfor noen brøker kan skrives som desimaltall mens andre ikke kan. I dag skal vi avsløre noen hemmeligheter. Og som alltid er det **dere selv** som skal avsløre dem – jeg er her for å hjelpe dere.

Elevene nikker og er med.

Lærer: La oss begynne med å se på tallene 10, 100 og 1000. Husker dere hva vi kalte slike tall?
Elever: - Dekadiske enheter.
Lærer: Helt riktig! La oss primtallsfaktorisere disse dekadiske enhetene. Husker dere hvordan vi gjør det?
Elever: - Ja! Det har vi gjort mange ganger.
- Vi repeterte det for ikke så lenge siden.

Elevene jobber. Etter noen minutter får tre elever komme på tavlen. De skriver:

$10 = 2 \cdot 5$ $100 = 2^2 \cdot 5^2$ $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$

Lærer: Ser dere noe spesielt med primtallsfaktorisering?
Elever: - Det er bare 2 og 5 som blir brukt.
- Det er like mange av hvert tall.
- Når vi skriver med potens, så blir eksponentene like.
Lærer: La oss nå gå tilbake til de «dårlige» brøkene våre og primtallsfaktorisere nevnerne.
Stine: Det er lett. Kan jeg få vise?
Lærer: Ja, vær så god, Stine.
Stine: $\frac{2}{3}$ har nevner 3 som er et primtall. Derfor trenger vi ikke å primtallsfaktorisere den. Nevneren i $\frac{5}{6}$ er lett å primtallsfaktorisere (*skriver*):
$6 = 2 \cdot 3$.

Lærer: La oss stoppe opp litt og gå tilbake til det Idun skrev (*peker på* $\frac{7}{8} = \frac{7 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{875}{1000}$).
Hva gjorde Idun med brøken $\frac{7}{8}$?
Elever: Hun utvidet den slik at nevneren ble 1000.
Lærer: Utvidet – hvordan? (*Legg merke til hvordan læreren stiller spørsmål ved å gjenta verbet.)*
Elever: Hun multipliserte telleren og nevneren med 125.
Lærer: Hvorfor fikk hun 1000 i nevneren?
Elever: Det er jo bare å gange 8 med 125.
Fredrik: Det er lett å vise at det må bli 1000 hvis vi primtallsfaktoriserer. Kan jeg få vise?
Lærer: Ja, vis oss, Fredrik.
Fredrik: 8 er lett å primtallsfaktorisere (*skriver*): $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Så kan vi primtallsfaktorisere 125 (*skriver*): $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5$. Nå har vi et produkt med akkurat tre 2-ere og tre 5-ere (*skriver*): $8 \cdot 125 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$. Dette er primtallsfaktoriseringen til 1000!
Lærer: Var alle med?
Elever: - Ja. Her var vi heldige.
- Når vi primtallsfaktoriserer nevneren i $\frac{7}{8}$, så får vi bare 2 tre ganger. Derfor ble det lett…
Lærer: La oss nå gå tilbake til den «dårlige» brøken $\frac{5}{6}$. Stine har allerede primtallsfaktorisert nevneren. Hvem vil skrive hvordan brøken ser ut når nevneren er faktorisert?

Det er flere som vil.

Lærer: Vilde! Du har ikke fått komme på tavlen i dag…

Vilde kommer opp og skriver: $\frac{5}{6} = \frac{5}{2 \cdot 3}$
Lærer: Fint! Prøv nå å utvide brøken slik at nevneren blir 10, 100, 1000 eller liknende.
Vilde *(tenker en stund, hun rynker pannen)*: Jeg skjønner ikke…
Lærer: Hva er det som er problemet?
Vilde: Altså – jeg kan jo gange med 5, men…
Lærer: Ja! Gjør det!

Vilde skriver: $\frac{5}{6}=\frac{5}{2\cdot 3}=\frac{5\cdot 5}{2\cdot 3\cdot 5}$

Vilde: 2 · 5 er jo 10, men jeg har jo fortsatt 3 der, så… Jeg vet ikke hva jeg skal gjøre nå.
Lærer: Så du mener at på grunn av faktoren 3 i nevneren, så kan ikke brøken skrives som et desimaltall?
Vilde: Ja, det 3-tallet ødelegger alt. Hvis det ikke hadde vært der, hadde det gått fint.
Lærer: Hva tenker dere andre? Er dere enig med Vilde?
Elever: - Ja, jeg tenkte også sånn!
- Tallet 3 blir igjen i nevneren, uansett hvilket tall vi ganger teller og nevner med.
Lærer: Hva med de andre brøkene vi satte opp? *(Viser til skjermen/tavlen der også brøkene* $\frac{2}{3}$, $\frac{7}{15}$ *og* $\frac{3}{14}$ *står.)*
Elever: - Den første er jo det samme. Der er det også 3.
- Det er det i $\frac{7}{15}$ óg. 15 er 3 · 5.
Lærer: Hva er problemet med $\frac{3}{14}$, da?
Elever: - Der er det ikke 3, men 7 som er problemet.
- 14 er 2 · 7. Vi blir ikke kvitt 7!
Lærer: Så hva kan vi sette opp som konklusjon…?

Etter en kort diskusjon kommer elevene fram til en riktig konklusjon som de sammenlikner med den som står i læreboka.

Samtale 5

Tema: Å dele et tall med en stambrøk (oppgaven er ikke hentet fra læreboken, men en som læreren har laget selv)

Til slutt vil vi ta med et eksempel der læreren har valgt å lage en egen oppgave for å skape en kognitiv konflikt knyttet til divisjon med stambrøk, som i Samtale 2 ovenfor. [lærerens fleksibilitet og selvstendighet]
På tavlen står følgende uttrykk:

64 : 4   64 : 2   64 : 16   64 : 1   64 : 32   64 : 64   64 : 8

Lærer: Hva er dette?

I kor: Kvotienter!
Lærer: Hva er likt og ulikt med kvotientene?
Ulike stemmer: De har samme dividend og ulike divisorer.
Lærer: Riktig! Finn verdiene til kvotientene.

Alle jobber.

Lærer: La dere merke til noe?
Ida: Jo mindre divisoren er, jo større er verdien.
Lærer: Er alle enige?
I kor: Ja!
Lærer *(skriver på tavlen)*: 12 : 2 og 12 : $\frac{1}{2}$. Finn verdiene til disse kvotientene.

Alle jobber.

Lærer: Hva fikk dere? Hva blir 12 : 2?
I kor: 6.
Lærer: Hva med 12 : $\frac{1}{2}$?
Ida *(litt usikker)*: Kanskje det også blir 6…?
Håkon: Det kan ikke bli 6 det óg, for vi deler jo med et annet tall!
Sebstian: Svaret blir sikkert mindre… Nei, større! $\frac{1}{2}$ er jo mindre enn 2. Så da må 12 : $\frac{1}{2}$ være

større enn 12 : 2.
Lærer: Så hva tror dere $12 : \frac{1}{2}$ blir?
Nora: Kanskje det blir 12…?
Sebstian: Nei, det kan det i hvert fall ikke bli! Alle vet at 12 : 1 er lik 12. Og her deler vi med $\frac{1}{2}$, ikke med 1!
Nadia: Jeg tror at vi ikke *kan* dele med en halv. Kan noen av dere dele et eple med en halv kanskje?
Morten: I dagliglivet kan vi kanskje ikke gjøre det, men vi kan i matematikken…
Ahmed: Kanskje $12 : \frac{1}{2}$ blir 24?
Nadia: Hæ, 24?! Vi *deler* jo. Da kan jo ikke svaret bli større enn 12…?
Ahmed: Vi kan sjekke med å gange svaret med divisor – er du enig i at $\frac{1}{2} \cdot 24 = 12$?

Læreren tegner på tavlen: 

Lærer: Hva har jeg tegnet her?
Ida: Et linjestykke som du har delt i 6 like deler.
Lærer: Fint! Anta at linjestykket er 12 cm langt. Hvor lang er hver av de seks delene?
Sebstian: 2 cm, selvfølgelig – siden 12 : 6 = 2.
Lærer: Kan dere lage andre likheter som passer til tegningen?

Disse likhetene foreslås av mange: $2 \cdot 6 = 12$ $12 : 2 = 6$ $12 : 6 = 2$

Lærer: Flott! Se hva jeg gjør nå.

Læreren deler den første seksdelen i 4 like store deler: 

Lærer: Linjestykket er fortsatt 12 cm langt. Tenk dere at vi fortsetter å dele linjestykket på denne måten. Hva er forskjellen fra i sted?
Ida: Linjestykket blir delt i mindre deler.
Sebstian: Vi får 24 deler til sammen.
Lærer: Hvor lang er en liten del nå?
Nadia: En halv centimeter.
Lærer: Lag nå likheter som viser en sammenheng mellom lengden av hele linjestykket og lengden av den minste delen.

Noen elever skriver på tavlen: $24 \cdot \frac{1}{2} = 12$ $12 : 24 = \frac{1}{2}$

Lærer: Kan dere lage enda en likhet?
Dina *(litt nølende)*: $12 : \frac{1}{2} = 24$
Ahmed: Det var jo det jeg sa – jeg sa jo at det ble 24!
Lærer: Hva mener dere andre? Er alle enige?
Nadia: Det er kanskje riktig, men… Jeg syns nå allikevel det er litt rart…
Kasper *(rekker opp hånden)*: Jeg kan forklare hvorfor $12 : \frac{1}{2}$ blir lik 24! Se her:
Uttrykkene 12 : 2 og $12 : \frac{1}{2}$ har samme dividend, og divisoren i det første uttrykket er 4 ganger så stor som divisoren i det andre, siden 2 er 4 ganger så stor som $\frac{1}{2}$. Da må $12 : \frac{1}{2}$ må være 4 ganger så stor som 12 : 2. Og siden 12 : 2 er 6, så må $12 : \frac{1}{2}$ være 24!