Innledning

Denne lærerveiledningen er rettet mot lærere som skal undervise etter læreverket **Matematikk 7**. Læreverket **Matematikk 5-7** bygger på Zankovs undervisningsmodell, og det forutsettes at elevene er blitt undervist etter denne modellen på 5. og 6. trinn (fortrinnsvis også på 1.-4. trinn) og at de har brukt tilhørende lærebøker. Lærestoffet i bøkene er en naturlig fortsettelse av lærestoffet på 6. trinn.

Læreverket for 7. trinn består av to grunnbøker med tilhørende lærerveiledninger og to oppgavebøker. Både grunnbøker og oppgavebøker inneholder en kort fasit som elevene selv kan bruke for å sjekke svarene sine.

Zankovs undervisningsmodell

Zankovs modell baserer seg på fem prinsipper som henger tett sammen:

1. Undervisning på et høyt nivå
2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle
3. Rask gjennomgang av stoffet
4. Bevisstgjøring av elevene i forhold til egen læringsprosess
5. Systematisk og målrettet utvikling av hver eneste elev i klasserommet

Disse teoretiske prinsippene viser vei og retning i opplæringen. Med tanke på implementering i klasserommet utarbeidet Zankov også noen didaktiske prinsipper som er universelle (dvs. gjelder alle fag): mangfoldighet eller allsidighet, kognitiv konflikt (kollisjon), progresjon og variasjon. Alle læreverk der Zankovs modell brukes, må følge disse prinsippene.

Gjennom eksempler hentet fra grunnbøkene for 7. trinn, vil vi nå beskrive hva som menes med prinsippene.

1. Undervisning på et høyt nivå

I modellen til Zankov er en «vanskelig oppgave» en oppgave som inneholder en eller annen «intrige» eller et problem. Det er en oppgave som ikke har en åpenbar løsningsmetode og som derfor tvinger elevene til å tenke og å komme på nye ideer. De oppnår innsikt i kunnskapen bak, og oppgaven gir dem dermed et utbytte.

En oppgave skal stimulere til lærelyst og arbeidsglede hos eleven. Elevene må ha et ønske om å takle den, og til slutt må den skape glede over å ha oppnådd noe, en følelse av egenverd og selvtillit. Etter Zankovs mening er det nettopp i en situasjon der eleven overvinner vanskeligheter at han eller hun aktivt tilegner seg ny kunnskap.

For å bruke Vygotskys terminologi bør oppgavene som velges orientere seg mot sonen for den nærmeste utvikling.

Vi velger å bruke oppgave 13.15 fra Grunnbok 7B for å illustrere en realisering av dette prinsippet:

13.15

a **Henrik** valgte seg to av disse uttrykkene:

$\boxed{c : a - d \cdot b}$ $\boxed{c : (a - b) \cdot d}$ $\boxed{-d - c : b \cdot a}$ $\boxed{(a + c) : (b - d)}$

Deretter satte han disse verdiene inn i uttrykkene:

$a = -\frac{5}{12}$ $b = -\frac{2}{3}$ $c = 0{,}4$ $d = -0{,}45$

Han regnet riktig og kom fram til at verdiene til uttrykkene var 0,2 og $\frac{1}{13}$. Hvilke uttrykk var det Henrik valgte seg?

Målet med oppgaven er å gjenta og forbedre ferdigheter innen regning med rasjonale tall. Elevene skal imidlertid ikke bare utføre de gitte regneoperasjonene. De skal også analysere strukturen til uttrykkene og kunne forutsi et forventet resultat.

2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle

Prinsippet om at teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle krever at kunnskapen som elevene tilegner seg er systematisk og vitenskapelig, at lærestoffet ikke er fragmentert, at emnene som studeres har logisk sammenheng, at elevene gjennom opplæringen gradvis danner seg et helhetsbilde av matematikk og at det skapes så sterke forbindelser mellom ulike emner som overhodet mulig for eleven.

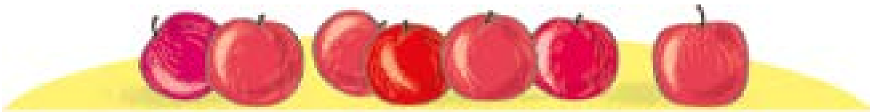
Det er neppe nødvendig å si at ekte (ikke formell) oppfatning og forståelse av lærestoffet kun er mulig når elevene utfører oppgaver på egen hånd, og når de på selvstendig basis danner seg en forståelse av de teoretiske grunnlagene for et gitt emne.

La oss som et eksempel se på hvordan prinsippet om systematisering og vitenskapelig kunnskap framstår når elevene skal lære om lineære funksjoner og grafene deres.

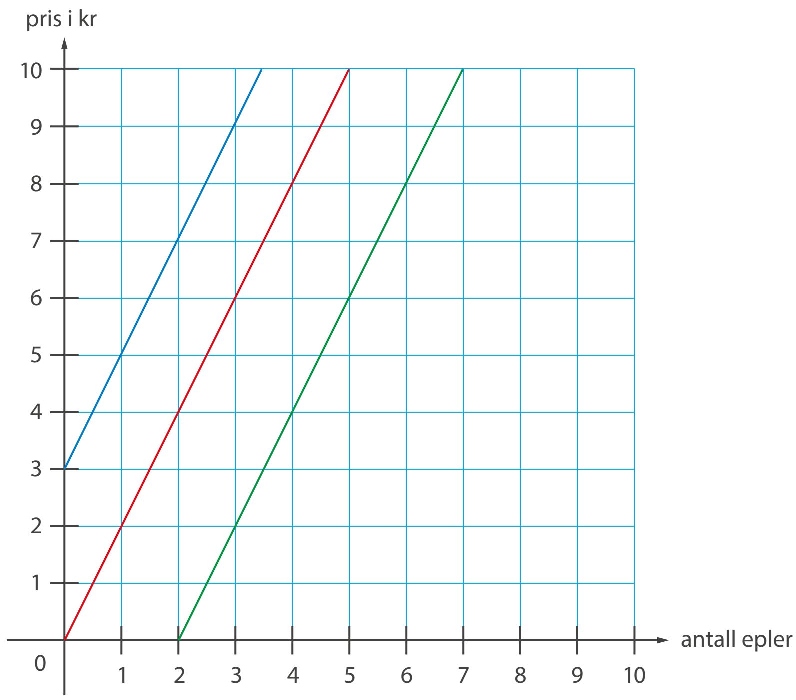
I utdraget nedenfor fra oppgave 15.1 er det valgt en kontekst der man ser på sammenhengen mellom antall epler og prisen man må betale. Dette er ment å være et praktisk og kjent eksempel for elever. Det er også et eksempel som kun gir mening for ikke-negative tall. Derfor er det i neste trinn nødvendig å vise en lineær sammenheng på generell form ved å utvide til negative tall og ved å bruke vanlig funksjonsnotasjon.

15.1

b En butikk selger epler til 2 kr per stk. I tillegg må alle kundene betale 3 kr for en pose. Hvordan vil du illustrere sammenhengen mellom antall epler og prisen man må betale i dette tilfellet?

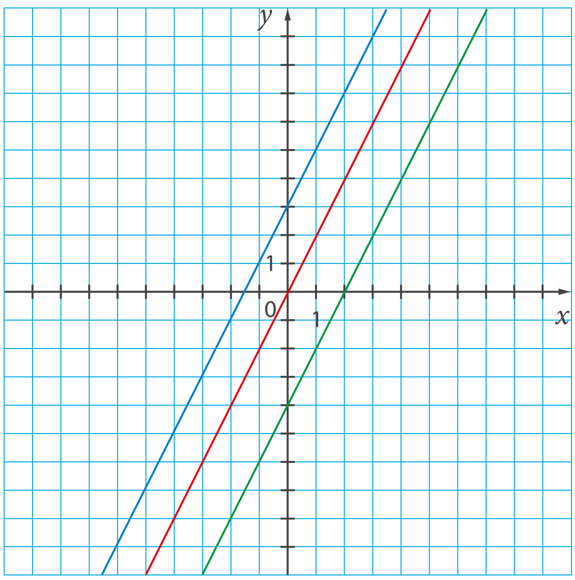


Se på grafene nedenfor. Hvilken av grafene passer til den nye situasjonen?



c I en annen butikk koster også eplene 2 kr per stk. Denne butikken gir alle kunder en rabatt på 4 kr uansett hva de kjøper. Passer en av grafene i b) til denne situasjonen?

d La oss forlenge linjene i b).



Hvilken av grafene passer til denne funksjonen?

$$y = 2x + 3$$

Finn likninger som passer til de andre grafene.

Basert på erfaringene elevene har tilegnet seg, jobbes det videre med begrepet stigningstall, og elevene introduseres for kravet til parallellitet.

15.4

a Se på grafene i oppgave 15.1 d). Hva er likt? Hva er ulikt?

Skriv ned funksjonene til grafene og sammenlikn dem. Hva er likt?

Hvis to rette linjer har samme stigningstall, vil de være parallelle.

b Hva er stigningstallet til funksjonen $y = \frac{1}{2}x$? Tegn grafen.

Tegn grafene til funksjonene $y = \frac{1}{2}x + 2$ og $y = \frac{1}{2}x - 4$. Hvordan kan den første grafen du tegnet være til hjelp?

Tegn to rette linjer med stigningstall:

i) -1 **ii)** $2{,}5$ **iii)** $-0{,}25$

Det neste elevene blir kjent med er den generelle likningen til en rett linje, $y = ax + b$. De skaffer seg flere erfaringer og ser hvordan stigningen til linjen er avhengig av a og at b er punktet der linjen skjærer y-aksen.

15.7

a Hva kaller vi figuren vi får når vi tegner grafen til funksjonen $y = ax + b$, der a og b er to tall?

Sett $a = 3$ og $b = 4$ inn i formelen $y = ax + b$. Lag en verditabell og tegn grafen til funksjonen.

Sett $a = 3$ og $b = -2$ inn i formelen $y = ax + b$. Hva vil være ulikt mellom grafen til denne funksjonen og grafen til den forrige? Hva vil være likt? Tegn grafen i samme koordinatsystem som den forrige.

b Grafen til en funksjon på formen $y = ax + b$ blir alltid en rett linje. Derfor kaller vi den for en **lineær funksjon**.

Hvilken av bokstavene i formelen $y = ax + b$ står for stigningstallet?

Hvordan påvirker verdien til stigningstallet grafen til funksjonen? (Hva skjer når stigningstallet endrer seg?)

Hva skjer med grafen når $a > 0$ og $a < 0$?

b kalles for **konstantleddet**. Hvorfor tror du det kalles det?
Konstantleddet viser hvor grafen krysser y-aksen.

Hva kan du si om grafen når: $b = 0$?
$b > 0$?
$b < 0$?

c Tegn grafen til $y = ax + 2$ når:

i) $a = 3{,}5$ **ii)** $a = -0{,}5$

d Tegn grafen til $y = -1{,}5x + b$ når:

i) $b = -1$ **ii)** $b = 3$

Hvordan endrer grafen til en lineær funksjon seg når konstantleddet endres?

Arbeidet med lineære sammenhenger slutter selvsagt ikke her. Det kommer en mengde oppgaver som fremmer både en dypere forståelse av lineære sammenhenger (inkludert situasjoner fra dagli-vet) og som utvikler og konsoliderer tilegnede ferdigheter knyttet til lineære funksjoner.

3. Rask gjennomgang av stoffet

Zankovs modell motsetter seg på det sterkeste kjedsomhet og rutine. Den er imot ideen om å tilby monotone oppgaver i timen som utelukkende er rettet mot utvikling av ferdigheter. Tvert imot – oppgavene skal være varierte, originale og kunne fange elevenes interesse.

I en læringsprosess er det selvsagt nødvendig med både repetisjon og konsolidering av stoffet. Man må imidlertid ikke glemme at hovedmålet med opplæringen er utvikling. Derfor er det helt nødvendig at det introduseres nye elementer samtidig med at stoffet gjentas. Hvis eleven må utføre samme type oppgave flere ganger bare for å automatisere ferdighetene sine, blir opplæringen kjedelig og lite effektiv. Denne type oppgaver kan heller gis som hjemmearbeid.

Videre er det ønskelig at oppgavene som er rettet mot repetisjon og konsolidering av stoffet, er annerledes enn «hovedoppgaven» (eller ser annerledes ut i det minste), slik at eleven får anledning til å se på det samme problemet fra en annen vinkel eller et annet perspektiv. Dette kan kalles «skjult repetisjon» eller «repetisjon uten repetisjon».

Til slutt er oppgavene i lærebøkene er satt sammen på en slik måte at man sikrer at elevene får lære noe nytt i hver eneste time.

Det er en selvfølge at repetisjonsoppgaver må knyttes til nytt stoff på en slik måte at læring av det nye foregår ved at man må tenke nytt om det som allerede er kjent. Dette skal bidra til å danne av et helhetsbilde av faget.

For å illustrere prinsippet om «raskt tempo» (som også kan leses som «skynd deg langsomt»), gjengir vi her de første oppgavene innen emnet «forhold». Oppgavene viser tydelig progresjon og utvikling. En bevisst og uformell mestring av dette emnet vil i stor grad bidra til en vellykket mestring av andre grener av matematikken og beslektede fagområder.

1.1

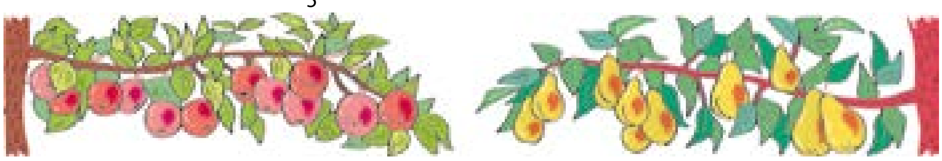
a Svar på spørsmålene ved å lage uttrykk som passer.
- **i)** Hvor mange ganger større er 20 enn 5?
- **ii)** Hvor stor brøkdel er 5 av 20?

b
- **i)** Et tall a er 5 ganger så stort som et tall b. Hva kan a og b være?
- **ii)** Et tall c er $\frac{1}{5}$ så stort som et tall d. Hva kan c og d være?

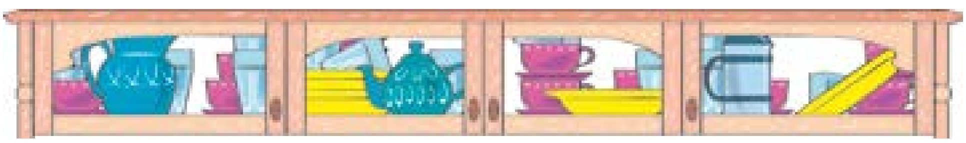
Finn flere mulige svar.

c
- **i)** Løs oppgaven ved å lage et uttrykk som passer.
  I en klasse er det 12 gutter og 8 jenter. Hvor mange ganger større er antall gutter enn antall jenter?
- **ii)** Lag et uttrykk som passer for å finne tallet som mangler.
  I en klasse er det 12 gutter og 8 jenter. Det er … så mange jenter som gutter.

d
- **i)** Sett inn tall slik at det blir $\frac{2}{5}$ så mange pæretrær som epletrær:



- **ii)** Sett inn tall slik at det blir 3,5 ganger så mange glass som kopper:
  I et kjøkkenskap er det … glass og … kopper.



1.3

a Hva er likt for disse uttrykkene?

$4:5$ $\quad 20:4$ $\quad \frac{2}{3}$ $\quad \frac{1{,}5}{7{,}5}$ $\quad a:b$ $\quad \frac{b}{a}$

Når vi deler et tall med et annet, sier vi at vi finner **forholdet** mellom de to tallene. Tallet vi får sier oss hvor mange ganger større det første tallet er enn det andre, eventuelt hvor stor brøkdel det første tallet er av det andre. Dette tallet kalles også **forholdstallet**.

b Gå tilbake til oppgave 1.1. Fant du forholdet mellom noen tall da du jobbet med oppgaven? Hvilke?

Hva er forholdet mellom antall gutter og antall jenter i punkt c)? Hva forteller forholdstallet oss?

Forholdet $4:5$ eller $\frac{4}{5}$ kan leses «4 til 5».

Les de andre forholdene som er oppgitt i a).

c Skriv forholdet mellom disse tallene på to ulike måter.

i 5 og 2,5 $\quad$ ii 18 og 10 $\quad$ iii 0,1 og $\frac{1}{3}$

Skriv forholdene enten som et naturlig tall eller et desimaltall.

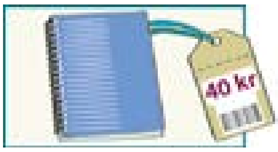
e Et rektangel *ABCD* har omkrets 28 cm. *AB* er 4 cm lengre enn *BC*. Finn *AB* og *BC*.

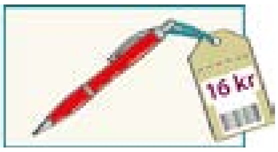
Skriv ned forholdet mellom *AB* og *BC*. Kan forholdet uttrykkes som et endelig desimaltall?

1.6

a Løs oppgavene ved å lage uttrykk som passer til.

I En skrivebok koster 40 kr, og en penn koster 16 kr. Hvor mange ganger dyrere er boken enn pennen?





II En klasse med 24 elever hadde en prøve i matematikk. 8 av elevene fikk maksimal poengsum på prøven. Hvor stor del av elevene fikk maksimal poengsum?

Hva kalles uttrykkene du laget?

b La m og n være to tall der m er større enn n. Hva forteller divisjonen $m:n$ oss?

Hva om m er mindre enn n – hva forteller divisjonen $m:n$ oss da?

Hvis $m > n$, viser forholdet $m:n$ eller $\frac{m}{n}$ hvor mange ganger større m er enn n.

Hvis $m < n$, viser forholdet $m:n$ eller $\frac{m}{n}$ hvor stor brøkdel m utgjør av n.

c Tarjei er 10 år, og Stine er 4 år. Skriv ned ulike uttrykk som kan brukes for å sammenlikne alderen til de to barna. Hva viser uttrykkene dine? Er noen av uttrykkene forhold? Hvilke?

d I en grønnsaksåker er det 12 rader med gulrøtter og 18 rader med poteter. (Alle radene er like lange.) Hva viser forholdene $18:12$ og $\frac{12}{12+18}$?

Hvilke andre forhold kan du lage som passer til eksemplet? Skriv dem ned og forklar meningen bak hvert uttrykk.

e I en kasse er det 16 røde, 20 grønne og 12 gule epler. Skriv ned noen forhold som gjør det mulig å sammenlikne antall epler av ulike farge.

Gjør forholdene om til naturlige tall eller desimaltall.

4. Bevisstgjøring av elevene i forhold til egen læringsprosess

Informasjonen som eleven mottar i timen og fra lærebøkene må forstås i sammenheng med læringsprosessen. Da er det først og fremst nødvendig at elevene forstår hvorfor de lærer et eller annet stoff, hvordan kunnskapen de har kan hjelpe dem i arbeidet med andre emner og hvordan problemene som de jobber med henger sammen.

På den annen side vil en slik analyse bidra til at elevene forstår årsakene til vanskeligheter som måtte oppstå og til feilene som er blitt gjort, og på den måten hjelpe dem til å eliminere feilene og ikke gjøre dem igjen. Hver oppgave i grunnbøkene eksisterer ikke kun for seg selv, men har både langsiktige og kortsiktige mål – oppgavene skal brukes til noe.

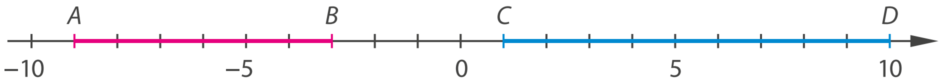
I Zankovs modell utvikles læringskomponenter som selvkontroll, selvtillit, vurdering av vanskegrad, vurdering av egen kunnskap og av egen «uvitenhet». Det er et kjent faktum at jo mer kunnskap man opparbeider seg, jo mer er man klar over hva man ikke kan. Derfor er prinsippet om bevisstgjøring av elevene i forhold til egen læringsprosess også rettet mot å sikre at eleven stadig avslører kunnskap om egen «uvitenhet».

For å illustrere prinsippet skal vi se på innføringen av koordinatsystem.

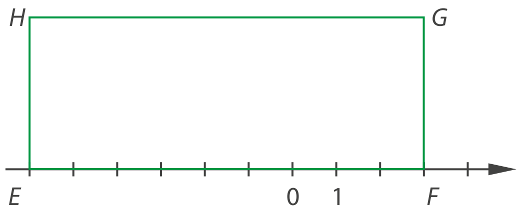
Begrepet tallinje er kjent for elever fra småskoletrinnet. På en tallinje kan vi vise plasseringen til et hvilket som helst reelt tall. En tallinje er imidlertid ikke nok for å beskrive plasseringen til en figur i planet. I arbeidet med oppgave 12.1 skal elevene føle at kunnskapen deres er mangelfull og dermed bli motivert for samt se nødvendigheten av å innføre et koordinatsystem.

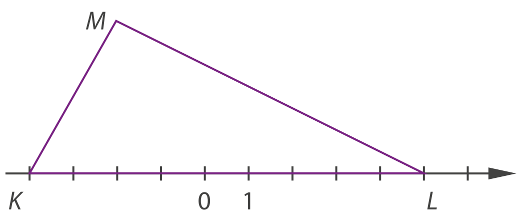
12.1

a Vi har to linjestykker *AB* og *CD* som vist på tegningen. Finn plasseringen til linjestykkene sine endepunkter.



b Vi har et rektangel *EFGH* og en trekant *KLM* som vist på tegningen. Prøv å finne plasseringen til figurene sine hjørnepunkter.





Klarte du å finne plasseringen til alle hjørnene? Hvis ikke, forklar hva som er problemet.

c Hvordan kan vi beskrive plasseringen til:

i en brikke på et sjakkbrett?

ii et sted på et kart?

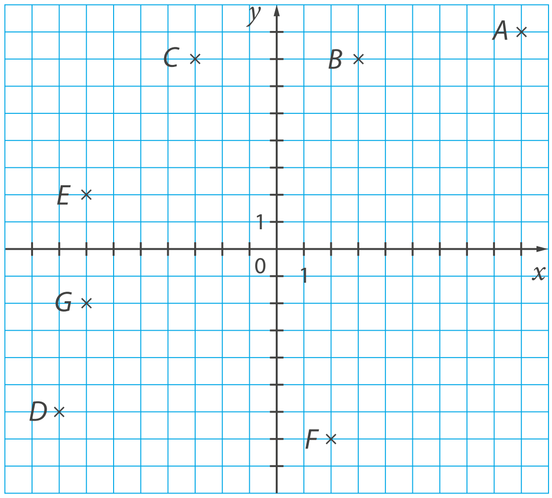
Foreslå en måte å beskrive plasseringen til et punkt i planet.

Etter å ha gjort en rekke oppgaver der fokus er rettet mot utvikling av ferdigheter i å finne koordinatene til punkter i et koordinatsystem, foreslås det å knytte emnet til emnet «symmetri» som elevene kjenner fra tidligere. Neste oppgave er rettet mot dette.

12.17

a Hva legger du merke til om plasseringen til punktene:

i) *B* og *C*? **ii)** *E* og *G*?



b Skriv ned koordinatene til de avmerkede punktene.

Hva er likt for punktene som ligger:

i) symmetrisk om x-aksen? **ii)** symmetrisk om y-aksen?

c Hvilke av punktene i rammen ligger symmetrisk om:

i x – aksen? ii y – aksen?

$I(4, -5)$	$K(-4, 5)$	$M(0, -2)$	$P(-2, -2)$	$R(0, 2)$
$J(-4, 2)$	$L(2, -2)$	$N(4, 2)$	$Q(-4, -2)$	

Merk av punktene i et koordinatsystem. Hadde du rett?

d To punkter *S* og *T* ligger symmetrisk om y-aksen. Andrekoordinaten til *S* er –4. Hva er andrekoordinaten til *T*?

Vet du hva førstekoordinatene til punktene er? Hvis ikke, velg tall selv og merk av punktene i et koordinatsystem.

e To punkter *U* og *V* ligger symmetrisk om x-aksen. I hvilke kvadranter kan punktene ligge? Kan de ligge på en av koordinataksene?

Velg koordinater for punktene og merk dem av i et koordinatsystem.

Neste trinn er å avbilde geometriske figurer som elevene kjenner fra tidligere i et koordinatsystem. Oppgave 13.4 er eksempel på en slik oppgave.

13.4

a Tegn et koordinatsystem og merk av disse punktene:

$A(2, 1)$	$B(7, 1)$	$C(7, 4)$	$D(2, 4)$

Tegn figuren *ABCD*. Hva slags figur fikk du?

Finn omkretsen til figuren. Finn arealet av figuren.

Når vi oppgir lengder til figurer i et koordinatsystem, bruker vi enheten på aksene som lengdeenhet. Når vi oppgir areal, bruker vi kvadrater med sider lik enheten på aksene som arealenhet.

b Merk av punktene $K(-3, 2)$ og $L(-3, -5)$ i det samme koordinatsystemet. Merk av punkter M og N slik at:

i) *KLMN* blir et rektangel som kun ligger i andre og tredje kvadrant.

ii) *KLMN* blir et rektangel der alle hjørnene ligger i ulike kvadranter.

iii) *KLMN* blir et rektangel der noen av hjørnene ligger på en koordinatakse.

Finn koordinatene til M og N i hvert tilfelle.

c Det ene hjørnet til et rektangel har koordinater $(3, -4)$. Omkretsen til rektangelet er 20 lengdeenheter. Finn passende koordinater for de andre hjørnene. Tegn rektangelet du får.

5. Systematisk og målrettet utvikling av hver eneste elev i klasserommet

Dette prinsippet antyder at læringsprosessen skal være individorientert. Derfor er oppgavene i grunnbøkene laget slik at alle elever skal finne noe som passer for dem og som fremmer nettopp deres utvikling. Hver oppgave består av en rekke spørsmål der det er en utvikling både i oppgavens innhold og i ideene som er lagt ned i oppgaven. Vi kan si at hver oppgave består av en serie «oppgaver» som har både egne didaktiske trekk og egne vanskegrader.

Nesten alle oppgavene i grunnbøkene er «flernivåoppgaver», dvs. at de inneholder utfordringer på ulike nivå. Som regel er de to første underpunktene ment for alle elevene. Deretter øker vanskegraden gradvis (man bør uansett forsøke å involvere alle elevene aktivt i læringsprosessen, men etter hvert vil kanskje noen av elevene trenge hjelp).

La oss illustrere realisering av dette prinsippet ved å vise og kommentere to oppgaver.

2.1

a Løs oppgavene.

I Per og Kari delte 24 drops mellom seg slik at Kari fikk dobbelt så mange drops som Per. Hvor mange drops fikk hver av dem?

II 24 epler ble delt på to skåler slik at det var tre ganger så mange epler i den ene skålen som i den andre. Hvor mange epler var det i hver skål?

Hva er likt i måten de løses på?

Vi sier at dropsene i oppgave I) ble **delt i forholdet 1 : 2** (leses «en til to»).
I hvilket forhold ble eplene i oppgave II) delt?

Sammenlikning av de to oppgavene gir oss en passende anledning til å innføre et nytt begrep, nemlig forhold.

Det er flere måter man kan arbeide med oppgavene på. I denne kan punkt b) både oppfattes som egenkontroll og som en hjelp til de elevene som eventuelt står fast.

b Noen elever gjorde slik da de skulle dele tallet 200 i forholdet 3 : 2

Ellinor
$$3 + 2 = 5$$
$$200 : 5 = 40$$
$$3 \cdot 40 = 120$$
$$2 \cdot 40 = 80$$

Daniel
$$\frac{200}{3+2} \cdot 3 = 120$$
$$\frac{200}{3+2} \cdot 2 = 80$$

Leyla
$$3x + 2x = 200$$
$$5x = 200$$
$$x = 40$$
$$3x = 80$$
$$2x = 120$$

Forklar hvordan de kan ha tenkt.

Har du et annet forslag for hvordan man kan dele 200 i forholdet 3 : 2?

Punkt c) består av øvelser. Legg merke til hvordan delpunktene har økende vanskegrad.

c
i) Del 60 i forholdet 1 : 2.
ii) Del 80 i forholdet 3 : 2.
iii) Del 130 i forholdet 4 : 1.
iv) Del 504 i forholdet 3 : 4.
v) Del 504 i forholdet 5 : 4.

Det siste punktet er en kreativ oppgave. Denne typen oppgave er nyttig både for å konsolidere kunnskap og ferdigheter og for utvikle kommunikasjonsevner.

d Lag en egen oppgave som handler om å dele et tall i et gitt forhold.
Løs oppgaven.

Typiske egenskaper ved modellen

De fire didaktiske prinsippene – mangfoldighet/allsidighet, kognitiv konflikt/kollisjon, progresjon og variasjon – kan også sies å være egenskaper eller karakteristikker som beskriver undervisning etter Zankovs modell.

Mangfoldighet/allsidighet i metoder og arbeidsmåter

Ifølge Zankov må oppgavene være interessante for elevene. Fokus må være rettet mot utvikling av ulike aspekter av elevenes mentale prosesser. Man er ikke kun opptatt av å utvikle elevenes intellekt, men prøver også å involvere følelser og ta hensyn til følelsesmessige behov i læringsprosessen, selv om behovet for kunnskap står sterkest. Stoffet behandles fra «ulike sider». Man sørger for å få fram ulike strategier og å trekke inn elevenes ulike erfaringer.

Dette betyr at oppgavene skal stimulere til selvstendig tilegnelse av kunnskap, til overvinnelse av vanskeligheter og til å vise skjønnheten i matematikken. Det siste kan f.eks. vises gjennom at man:

1. finner en ny (utradisjonell eller uventet) måte å løse en oppgave på
2. finner en uventet enkel løsning på et vanskelig problem
3. oppdager uventede forbindelser mellom tilsynelatende helt forskjellige emner
4. løser en kognitiv konflikt som har oppstått (se avsnittet «Kognitiv konflikt» nedenfor)
5. gjetter på en løsning og så sjekker om man hadde rett
6. løser et problem på flere ulike måter
7. lager egne oppgaver (dette setter i sving følelser, og følelser kan ifølge Zankov fungere som en *kreativ kraft*.)

Vi vil nå vise med noen eksempler hvordan denne egenskapen realiseres. Oppgavene handler om figurtall. (Elevene har så vidt vært bort i trekanttall tidligere da de jobbet med oppgaver i kombinatorikk.)

De første figurtallene som innføres er kvadrattall. Tallene knyttes til geometriske figurer, og elevene studerer blant annet differansen mellom påfølgende kvadrattall.

7.27

a Hvor mange stjerner er det i hver figur? Lag en tallfølge som passer til figurserien.

b Hvordan er disse uttrykkene laget?

$4^2 - 3^2$ $\qquad$ $8^2 - 7^2$ $\qquad$ $11^2 - 10^2$

Hva er sammenhengen mellom differansene og figurserien i a)? (Du kan tenke deg at figurene fortsetter videre etter samme mønster.)

Finn verdiene til uttrykkene.

Finn en sammenheng mellom tallene du fikk og grunntallene til potensene i hvert uttrykk.

Formuler en hypotese. Sjekk hypotesen ved å bruke andre eksempler.

c Sammenlikn din hypotese med denne:

Hvis m og n er to påfølgende naturlige tall der $m < n$, så er $n^2 - m^2 = n + m$.

Prøv å begrunne hypotesen ved hjelp av figurer.

I den neste oppgaven repeteres trekanttall. Tallene knyttes både til geometriske figurer og til summen av naturlige tall.

8.9

a Figurene nedenfor vokser etter et bestemt mønster. Beskriv mønsteret med egne ord.

Lag tegninger som viser hvordan de to neste figurene vil se ut.

Hvor mange stjerner er det i hver figur? Skriv av og fyll ut tabellen.

Figur nr.	1	2	3	4	5	6
Antall stjerner						

b Tallene 1, 3, 6, 10, 15,… kalles **trekanttall**. Hvorfor tror du de kalles det?

Bruk tegningene og vis at trekanttallene er lik verdiene til disse uttrykkene:

1
1 + 2
1 + 2 + 3
1 + 2 + 3 + 4
…

c Finn verdiene til bokstavene.

i) $1 + 2 + 3 + \ldots + m = 45$

ii) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = 78$

iii) $1 + 2 + 3 + \ldots + r = 120$

Deretter dukker det opp en vakker og kanskje uventet geometrisk sammenheng mellom trekanttall og kvadrattall.

8.23

a Hva kalles disse tallene?

1, 3, 6, 10, 15, ...

Finn summene av to påfølgende trekanttall:

1 + 3
3 + 6
6 + 10
...

Kjenner du igjen tallene du fikk til svar? Hva kalles de?
Kan du formulere en hypotese?

b Bruk figurene nedenfor og forklar hvorfor **summen av to påfølgende trekanttall er et kvadrattall**.

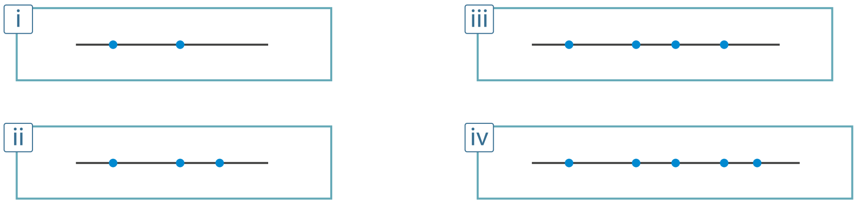
c Skriv tallene som en sum av to påfølgende trekanttall.

i) 121 **ii)** 196 **iii)** 256 **iv)** 441

En annen sammenheng mellom trekanttall og kvadrattall kan man observere i oppgave 9.12.

9.12

a Hvor mange linjestykker er det på hver figur?

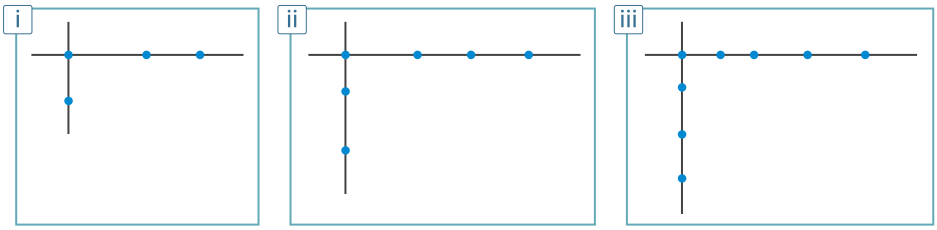


Skriv tallene du fikk som en tallfølge.
Ser du et mønster? Bruk mønsteret og skriv de tre neste tallene i følgen.
Kjenner du igjen tallene? I hvilken sammenheng har du sett dem før?

b Tegn en linje og sett av punkter slik at figuren får til sammen:

i) 21 linjestykker **ii)** 36 linjestykker **iii)** 55 linjestykker

c Hva er nytt på disse figurene?



Hvor mange linjestykker er det på hver figur? Kjenner du igjen tallene?
Hvorfor blir antallet lik et kvadrattall?

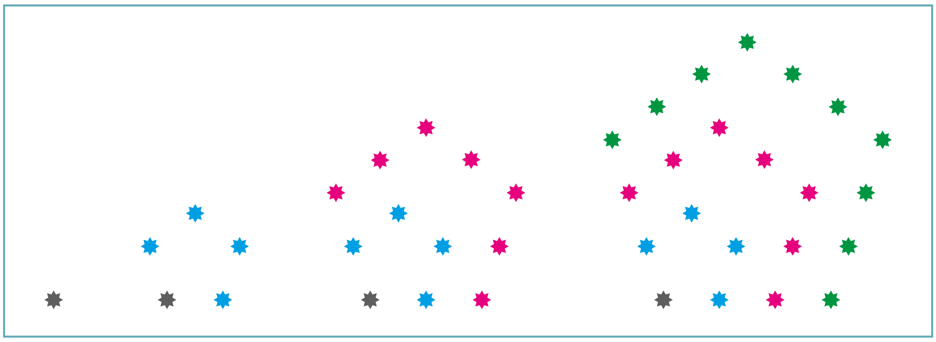
d Lag en liknende tegning slik at figuren får til sammen:

i 25 linjestykker. **ii** 49 linjestykker.

I oppgave 11.7 følger vi det nyttige didaktiske prinsippet til George Polya om alltid å generalisere. Her studeres femkanttall og sekskanttall og deres naturlige sammenheng med andre figurtall.

11.7

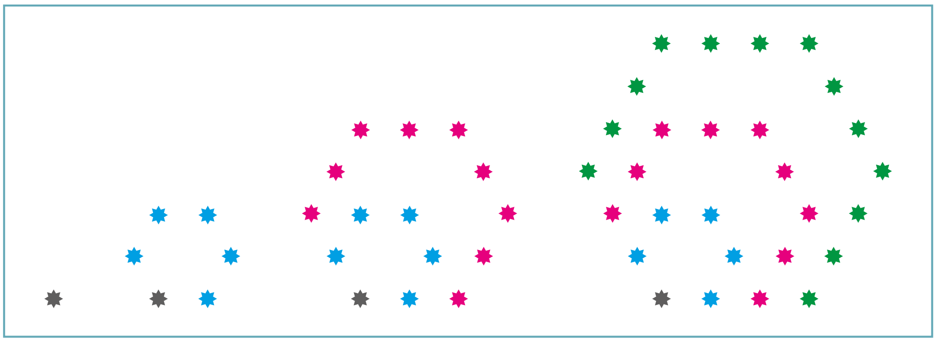
a Her ser du noen figurer som vokser etter et bestemt mønster.



Hvor mange stjerner er det i hver figur?

b Tallene 1, 5, 12, 22,… kalles **femkanttall**. Hvorfor tror du de kalles det?
Undersøk hvordan femkanttallene vokser og finn de to neste tallene i følgen.

c Hvor mange stjerner er det i hver figur i denne serien?



Hva vil du foreslå å kalle tallene du fikk?

d Skriv ned sekskanttallene fra c) i stigende rekkefølge. Finn de 3 neste tallene i følgen.

Til slutt etableres en sammenheng mellom figurtallene elevene har studert til nå.

12.22

a Kjenner du igjen tallfølgene i denne tabellen? Hvor har du sett dem før?
(Gå tilbake til oppgave 11.7 hvis du trenger det.)

1	3	6	10	15	21	28
1	4	9	16	25	36	49
1	5	12	22	35	51	70
1	6	15	28	45	66	91

Finn det neste tallet i hver følge.

b **Johannes** satte opp dette for de to første tallfølgene i tabellen:

1		3		6		10		15		21		28
	2		3		4		5		6		7	
1		4		9		16		25		36		49
	3		5		7		9		11		13	

Hvordan har han tenkt?

Gjør det samme for femkanttallene og sekskanttallene. Foreslå et felles navn for tallene under pilene.

Beskriv mønstrene du ser for differansene.

c Sammenlikn differansene for de ulike tallfølgene og bruk det du ser til å finne de 5 første sjukanttallene.

Hvis du står fast, tenk over hva differansene mellom sjukanttallene må være.

Kognitiv konflikt (kollisjon)

I læringsprosessen oppstår det ofte situasjoner der ny kunnskap er i konflikt med (eller til og med motsier) gammel kunnskap. Det kan være situasjoner der vi ikke har tilstrekkelig kunnskap for å løse et gitt problem, eller der det er nødvendig å velge en riktig tilnærming blant flere alternativer for å løse problemet. Denne type situasjon kalte Zankov **kollisjon** (fra latin collisio – kollisjon).

Kollisjon (kognitiv konflikt) i Zankovs modell er noe positivt. Det er en god anledning til å gjøre opplæringen mer produktiv ved å involvere elevenes følelser, først og fremst overraskelse og tilfredsstillelse (etter at konflikten er løst).

I tillegg kan vi si at kognitive konflikter:

a) hjelper en å forstå et problem dypere
b) skaper interesse for faget
c) skaper lærelyst
d) motiverer til utforskende og selvstendig arbeid
e) hjelper en å komme på et nytt nivå av forståelse
f) bidra til dypere kunnskap
g) tillater en å se estetiske sider ved matematikk

Når en konflikt oppstår, må den løses. Elevene må gis mulighet til å undersøke situasjonen aktivt og prøve å finne en vei ut av problemet. Selve prosessen med å løse en konflikt krever at man i en eller annen grad må revurdere gammel kunnskap og søke etter nye tilnærminger for å løse problemet. Elevene må hjelpes til å komme til et nytt nivå når det gjelder forståelse av stoffet.

La oss se på noen eksempler på konflikter, og samtidig indikere hva slags konflikt eksemplet refererer til.

1. Konflikt: Når noe strider mot tidligere erfaring eller sunn fornuft

I oppgave 7.6 presenteres en situasjon der penger på en konto blir utsatt for to påfølgende prosentvise økninger (det som på norsk kalles «renters rente»).

7.6

a Løs oppgaven.

I januar 2018 var det 25 000 kr på en bankkonto. Beløpet økte med 2 % for hvert år. Hvor mye var det på kontoen i januar 2019? Hva med i januar 2020?

b Hvis du står fast, se på dette skjemaet:

Hvor mange kroner vokste beløpet med i løpet av det første året? I løpet av det andre året? Hvorfor fikk du ulike svar?

c Hvor mange prosent økte beløpet med i løpet av de to første årene?

d Sammenlikn denne oppgaven med den i c):

I september kostet 1 kg epler 20 kr. Fra september til november økte prisen med 20 %, og fra november til januar økte den med 25 %. Hva kostet 1 kg epler i januar? Hvor mange prosent dyrere var eplene i januar sammenliknet med i september?

Løs oppgaven.

Konflikten består i at man i utgangspunktet kan tro at beløpet har økt med 4 % etter to år. Ved å forstå problemet og gjøre de nødvendige beregningene overbevises imidlertid elevene om at beløpet faktisk vil ha økt med 4,4 %. Å løse konflikter betyr at det blir tydelig for elever hvorfor svaret som det er.

2. Konflikt: Å se ulikheter selv om oppgaver ser like ut

Undertittelen antyder hva denne konflikten handler om. I Zankovs modell benytter man seg ofte av en teknikk der man sammenlikner to oppgaver som likner i form og innhold. Hensikten er at elevene skal forstå stoffet bedre.

Oppgave 12.15 handler om å dele et tall i et gitt forhold. Hovedmålet med oppgaven er at elevene skal lære seg å løse en ny type problemstilling innenfor dette emnet.

12.15

a Sammenlikn oppgavene.

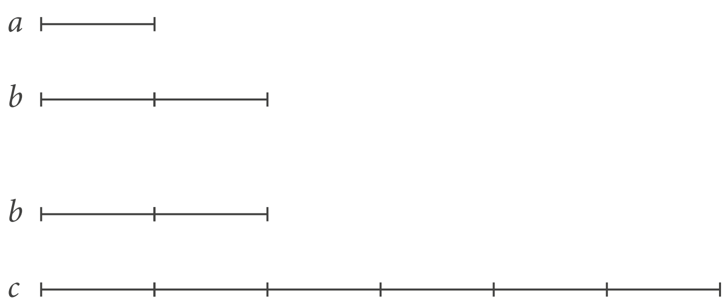
I 162 kan skrives som $a + b + c$, der forholdet mellom leddene i summen er 1 : 2 : 3. Finn a, b og c.

II 162 kan skrives som $a + b + c$, der $a : b = 1 : 2$ og $b : c = 1 : 3$. Finn a, b og c.

Tror du at verdiene til a, b og c vil være like i de to oppgavene? Begrunn.

Løs oppgavene.

b Hvis du får problemer med oppgave II), så se på denne modellen.



Er du enig i at proporsjonen $b : c = 1 : 3$ kan erstattes med proporsjonen $b : c = 2 : 6$?

Forklar hvorfor vi derfor kan erstatte $a : b = 1 : 2$ og $b : c = 1 : 3$ med $a : b : c = 1 : 2 : 6$.

Et annen eksempel ser vi i oppgave 10.11. Der fokuseres det på forskjellen mellom forhold i prosent og sammenlikning av tall vha. prosent.

10.11

a Sammenlikn oppgavene. Hva er den vesentligste forskjellen mellom dem?

I I en kakeboks er det 48 kjeks. 36 av dem inneholder sjokolade. Hvor mange prosent av kjeksene inneholder sjokolade?

II 48 gutter og 36 jenter reiste på klassetur til Kongeparken. Hvor mange prosent flere gutter enn jenter var med på turen?

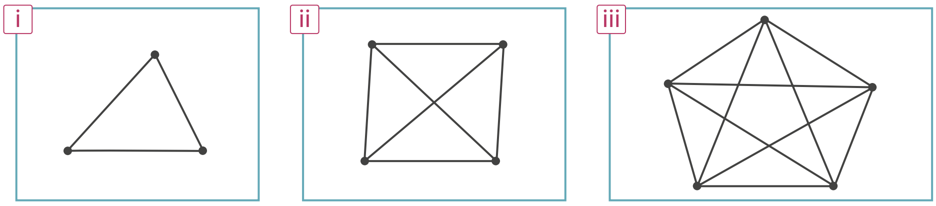
Løs oppgavene.

3. Konflikt: Å se likheter selv om oppgaver ser ulike ut

I den neste oppgaven er det i en viss forstand snakk om en motsatt type konflikt. Arbeid med oppgaven vil gjøre elevene bedre i stand til å se sammenhengen mellom ulike situasjoner og få en dypere forståelse for utvalg uten tilbakelegging der rekkefølgen er uten betydning.

10.13

a Hva ser du her?

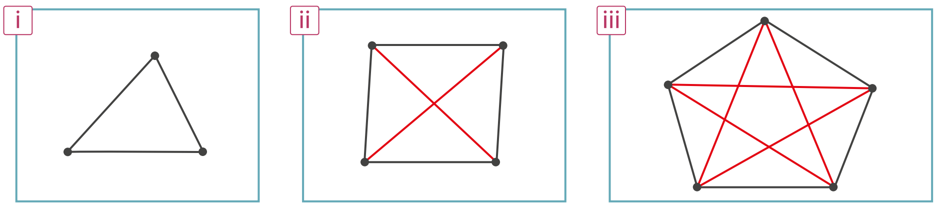


Hvor mange linjestykker er det på hver graf?
Tenk deg at man tegner to grafer til etter samme mønster. Hvor mange linjestykker tror du de nye grafene vil ha?

Skriv antall linjestykker som en tallfølge.

Gå tilbake til oppgave 10.7. Hvilken oppgavetype (håndtrykk eller snapper) passer disse grafene til?

b Hva er nytt på disse tegningene? Hva kalles de røde linjestykkene?



Hvor mange diagonaler er det i en firkant? Hvor mange er det i en femkant?

Tegn en sekskant og en sjukant og tegn alle diagonalene.

c Hva er sammenhengen mellom denne tallfølgen og figurene over?

0, 2, 5, 9, 14, …

Hva er sammenhengen mellom denne tallfølgen og den du skrev i a)?

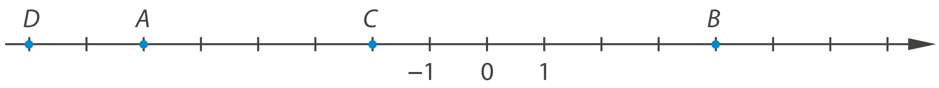
Progresjon (kontinuitet)

Zankov mente at læringsstoffet ikke burde presenteres tema for tema der man går videre til neste tema etter at elevene har jobbet en stund med det forrige og lært dette godt. Læring er først og fremst en **prosess** der ny kunnskap bygger på kunnskapen man har fra før. Tidligere kunnskap bearbeides, man ser på den fra andre vinkler og danner en større struktur med dypere mening (dybdelæring).

Vi vil nå vise hvordan progresjon fungerer ved å se på utviklingen av begrepet «absoluttverdi». Allerede i den første oppgaven oppfordres elevene til å «leke» med begrepet og til å legge merke til detaljer og mulige vanskeligheter knyttet til absoluttverdi. Dette skal forberede dem til å utføre mer utfordrende oppgaver.

7.12

a Finn plasseringen til punktene *A*, *B*, *C* og *D*.



Hva er avstanden fra hvert punkt til 0 (målt i enheter)?

> *La a være et tall på tallinjen.*
> *Avstanden fra a til 0 kalles **absoluttverdien** eller **tallverdien** til tallet.*
> *Absoluttverdien til a skrives slik: $|a|$*

For eksempel har tallet –6 absoluttverdi 6, og tallet 5 har absoluttverdi 5.

Dette skrives slik: $|-6| = 6$ $|5| = 5$

b Finn absoluttverdien til disse tallene – skriv som vist over.

i -10 ii -16 iii -2

c Finn absoluttverdien til de motsatte tallene til tallene i b).

Er du enig i dette?

> *Motsatte tall har alltid samme absoluttverdi.*

d Når er absoluttverdien til et tall lik tallet selv?
Når er absoluttverdien til et tall lik det motsatte tallet?

Skriv ned tre hele tall og finn absoluttverdiene.

Hva er fortegnet til tallene x og y hvis $|x| = x$ og $|y| = -y$?

e a, b og c er hele tall. Hva kan tallene være hvis:

i $5 < |a| < 7$ og $|a| = a$?

iii $32 < |c| \leq 33$ og $|c| = c$?

ii $12 \leq |b| < 13$ og $|b| = -b$?

iv $29 \leq |d| \leq 32$ og $|d| = -d$?

Finn alle løsninger.

I neste oppgave blir «leken» med absoluttverdien mer komplisert, og man ser på ulike aspekter og sammenhenger ved begrepet.

7.15

a Hva kan t være hvis $|t| = 3$?

b Finn mulige verdier til bokstavene.

i) $|x| = 5$ **ii)** $|y| = 1{,}5$ **iii)** $|z| = 0$

c Tallet m kan ha følgende verdier: $-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$
Hvilke verdier kan da disse uttrykkene ha?

i) $|m|$ **ii)** $|m| - 3$ **iii)** $|m|$ **iv)** $2|m| + 1$

d x og y er hele tall slik at $|x| + |y| = 3$ og $x < y$. Finn alle mulige verdier til tallparet x og y (f.eks. $x = 1$, $y = -2$).

Hvor mange tallpar fant du?

e u og v er hele tall slik at $u < 0$, $v > 0$ og $|u| \cdot |v| = 6$. Finn alle mulige verdier til tallparet u og v.

Etter å ha jobbet litt med sammenlikning av hele tall kommer noen oppgaver der elevene skal løse likninger og ulikheter som inneholder absoluttverdi.

7.20

a Studer likningene. Har alle løsning? Hvor mange løsninger har hver likning? Begrunn.

i $|x| = 5$ **ii** $|y| = 12$ **iii** $|z| = 0$ **iv** $|v| = -1$

Løs likningene og sjekk svaret.

b Hvilke av løsningene over svarer til de avmerkede punktene på denne tallinjen?

c Lag en likning med en ukjent absoluttverdi slik at likningen har:

i 2 løsninger. **ii** 1 løsning. **iii** ingen løsning.

7.24

a Finn et eller flere hele tall som passer inn i likheten eller ulikheten.

i) $|a| = a$ **iii)** $|c| > c$ **v)** $|e| > -e$

ii) $|b| = -b$ **iv)** $|d| \leq d$ **vi)** $|f| \leq -f$

For hver ulikhet finn to hele tall som *ikke* passer inn.

b Lag en likning og en ulikhet der:

i) alle positive tall passer inn.

ii) alle negative tall og null passer inn.

iii) bare null passer inn.

Vi ser her at et rimelig ukomplisert begrep, som først og fremst ble innført for å gjøre oss i stand til å formulere en algoritme for å sammenlikne hele tall, i den videre læringsprosessen leder til mer utfordrende oppgaver der elevene skal løse likninger og ulikheter med absoluttverdi. Dette er i sin tur en forberedelse til algebra.

Variasjon

«Variasjon» kan i denne sammenheng oppfattes som «det som tillater endring». Hva slags endringer kan man gjøre når man bruker Zankovs modell?

1. Tidsrammen til hvert tema kan endres selv om det gis et forslag til hver time.
2. Variasjon bestemmer strukturen av timen. Strukturen av timen og elevenes aktiviteter (muntlig, skriftlig arbeid, lek osv.) kan endres.
3. Vanskegrad kan endres.
   Oppgavene i grunnbøker og oppgavebøker er varierte når det gjelder både struktur og vanskegrad. Ved å velge og variere vanskegrad på oppgaver som gis til den enkelte elev eller elevgruppe, har læreren mulighet til å gjennomføre tilpasset opplæring.
4. Rekkefølgen av oppgavene kan endres hvis læreren finner det fornuftig. Både elever og lærer oppfordres også til å bruke kreativitet og egne oppgaver.

Variasjon åpner med andre ord opp for et bredt repertoar av læreres og elevers kreative samhandling. Vi vil understreke at når man varierer arbeidsmåter og metoder, er det nødvendig å sikre at de didaktiske prinsippene som Zankovs modell baserer seg på, ikke blir brutt.

På grunn av det spesifikke ved denne didaktiske egenskapen, er det neppe behov for å illustrere med konkrete eksempler nøyaktig hvordan dette implementeres. Avgjørelser vil måtte bygge på logikken i timens oppbygging, mulige vanskeligheter som måtte oppstå hos elevene osv.

Om direkte og indirekte veier i opplæring

Zankov innførte noen pedagogiske begrep som han kalte «direkte vei i opplæring» og «indirekte vei i opplæring». Med «direkte vei i opplæringen» mente han elevens akkumulering, forståelse og bearbeidelse av ulik informasjon og arbeid med oppgaver i samsvar med læringsmål. Med «indirekte vei i opplæring» mente han elevens generelle utvikling.

En direkte vei kan ses på som en opplæring der lærerens rolle er å «lære fra seg», dvs. å forsøke å «overføre» kunnskap til eleven. En slik opplæring kan føre til gode eller tilfredsstillende resultater på kort sikt, men på lang sikt er det ikke en stabil vei.

Zankov og hans kolleger viste gjennom en rekke eksperimenter at en indirekte vei i opplæringen gjør eleven i stand til å tilegne seg en betydelig større mengde kunnskap. Denne veien gjør det mulig for eleven å gå dypere inn et problem, å forstå sammenhengen mellom de enkelte emnene bedre og å forstå selve læringsprosessen bedre. Dette betyr at en indirekte vei i opplæringen bidrar til en realisering av Zankovs prinsipper.

Vi mener at den indirekte veien bør inneholde en eller annen intrige, et «lite knep» som hjelper eleven å få en dypere forståelse av stoffet. En indirekte vei i opplæringen innebærer at elevene tilegner seg kunnskap på en selvstendig måte. Den indirekte veien i opplæringen kan involvere den nærmeste utviklingssonen til den enkelte elev på en mye mer intens måte enn den direkte gjør.

Zankov mente ikke at direkte veier i opplæringen var foreldet og burde elimineres fra undervisningspraksis for å erstattes med indirekte veier: det handler kun om *forholdet* mellom disse veiene. I Zankovs modell har den indirekte veien en absolutt førsteprioritet.

Vi mener at Zankovs tanker på dette feltet passer meget godt overens med tankene bak den norske læreplanen.

Noen karakteristikker ved timene

Dette avsnittet er først og fremst rettet til de lærerne som ikke har jobbet etter Zankovs modell tidligere. Spørsmål man gjerne stiller seg er «hvor skal jeg begynne?» Det er selvsagt nødvendig å sette seg inn i prinsippene og egenskapene som modellen baserer seg på. Man bør bla gjennom grunnbøkene og prøve å forstå tanken bak oppgavene – hvorfor de er satt sammen slik de er, hva man ønsker å oppnå, legge merke til progresjonen, osv. Enda viktigere er det imidlertid å gjennomgå det vi kan kalle en «personlig psykologisk omstilling», spesielt hvis du i lang tid har jobbet på en annen måte. Mange opplever det å gå over til å undervise etter Zankovs modell som en stor omvelting. Man må bruke mer tid på forberedelser, man må være veldig oppmerksom på sin egen rolle i klasserommet, man må ha tro på at elevene kan få til oppgaver som man kanskje selv finner utfordrende, osv.

Hvis man har anledning til å besøke et klasserom der det undervises etter Zankovs modell, bør man gjøre det. Prøv å fange opp det som er nytt, prøv å plassere deg selv i lærerens sted: Ville du gjort noe annerledes? Kunne du gjort noe på din egen måte? Forsøk å vurdere dine tidligere aktiviteter kritisk – prøv å venne deg til en ny pedagogisk tilnærming. Forsøk å legge merke til så mange særegne trekk som mulig hos «Zankov-elever».

Avslutningsvis vil vi gi noen karakteristikker av en Zankovs time. Dette er ikke ment å være en fullstendig eller endelig liste med sannheter. Det reflekterer bare våre subjektive synspunkter og prioriteringer.

1. Timen bør være dynamisk – stoffet bør gjennomgås i et raskt tempo. Det bør være interessant for elevene å være til stede i timen. De må være aktive og vise interesse for det de driver med. Læreren må ikke føle seg låst av rutiner. Det er viktig å unngå at elevene kjeder seg. Derfor bør man bekjempe kjedsomhet og rutine i timene. Dette innebærer for eksempel at man ikke dveler for lenge med oppgaver og at man forsøker å unngå for mye gjentakelser. Læreren bør i det hele tatt være opptatt av at det skal være livlig i klasserommet.
2. Læreren må være fleksibel og åpen. Planen for timen er ikke et dogma, bare en «kontur» - i klasserommet kan uforutsette ting skje som gjør at man må vike fra planen. Elevene må prioriteres. (Timen kjøres **sammen** med elevene – det som skjer må **springe ut fra** dem.) Eleven er et aktivt subjekt, ikke objekt, i læringsprosessen.
3. Læreren må skape en god stemning i klasserommet. Det er viktig for læringsprosessen at elevene føler emosjonell komfort i timene. De må ikke være redde for å gjøre feil. Når feil oppstår, må læreren reagere raskt og hjelpe eleven både til å innse feilen og til å rette den opp. Elevene bør ikke sammenliknes med hverandre, men med seg selv. Finn noe (ekte) som eleven kan gis ros for. Det er vesentlig å involvere **alle** elevene, noe som innebærer å tilpasse nivået.
4. Læreren må forstå hensikten med hver eneste oppgave som velges (dvs. forstå hva det er den utvikler). Videre må hver elev ha utbytte av **hver** time – de må lære noe nytt. Man må sørge for å opprettholde og skape lærelyst hos elevene.
5. Det meste av tiden i klasserommet brukes på at elevene jobber selvstendig eller at klassen diskuterer ulike løsningsstrategier. Oppgavene har ulik vanskegrad, og man må sørge for å inkludere oppgaver som passer for de som strever slik at de blir tryggere og stoler mer på seg selv. Timene bør fylles med følelser.

Oppbyggingen av timene kan skjematisk beskrives slik:

1. Læreren formulerer en problemstilling som svarer til det som er hovedtema for timen.
2. Elevene leter etter løsningsstrategier, diskusjoner settes i gang, og det foregår en utveksling av ideer.
3. Læreren dirigerer prosessen og leder diskusjonen mot de mest aktuelle aspektene ved temaet.
4. Når problemet som hører til hovedtemaet er løst, diskuteres resultatene og uklarheter elimineres.

5. Elevene jobber med oppgaver med sikte på å konsolidere den tilegnede kunnskapen og danne grunnleggende ferdigheter.
6. Læreren gir elever mulighet til å utveksle meninger. Elevene kan lage egne oppgaver eller legge frem forslag til hvordan man kan jobbe videre med det aktuelle emnet osv.
7. Læreren oppsummerer timen og vurderer elevenes innsats. I den forbindelse legges det større vekt på aktiv deltakelse i læringsprosessen enn på resultatoppnåelse.

Oppsummering:
La elevene først studere et fenomen. La dem tenke gjennom begreper og oppdage sammenhenger. Deretter bør de få jobbe med ferdigheter slik at de forstår stoffet enda bedre. Målet er å hjelpe hver enkelt elev til å utvikle evnene sine på en mest mulig optimal måte:

- kognitive evner (tankemessige: logikk, observasjon, hukommelse, abstrakt tenkning, osv.)
- kommunikative evner (ulike måter å kommunisere på, kunne finne løsning på et problem)
- viljestyrte evner (ikke bare sette seg et mål, men også motivere seg selv til å oppnå dette målet)
- affektive (følelsesmessige) evner.

Målet er ikke å nøye seg med at de gjennomsnittlige prestasjonene i elevgruppen er akseptable. Læreren må tenke på utviklingen til hver enkelt elev.

Oversikt over innholdet i grunnbøkene

Positive og negative tall
Negative tall som utvidelse av tallbegrepet. Geometrisk tolkning av negative tall. Bruk av tallinje i regning med positive og negative tall. Motsatte og inverse tall. Sammenlikne hele tall (algoritme). Regne med negative tall i praktiske sammenhenger. Addisjon og subtraksjon av reelle tall og sammenheng med bevegelse langs tallinje. Begrepet absoluttverdi og geometrisk tolkning av absoluttverdi. Regne med reelle tall. Potenser med negative grunntall og naturlige tall som eksponenter.

Forhold og proporsjoner
Begrepet forhold og forholdstall (forhold mellom tall og størrelser). Dele et tall i et gitt forhold. Forhold i praktiske situasjoner. Begrepet proporsjon. Løse likninger som er proporsjoner. Målestokk (som forhold). Proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser.

Elementer av algebra
Bokstavuttrykk. Sette et tall inn i uttrykk. Sammensatte uttrykk med potenser og parenteser. Lage uttrykk som beskriver praktiske situasjoner. Likninger og ulikheter med reelle tall og rasjonale røtter. Bruk av ulike strategier for å løse likninger og ulikheter og vurdere om løsninger er gyldige. Begrepet figurtall. Finne mønsteret i figurtall, beskrive og videreføre mønsteret. Finne mønsteret i tallfølger, beskrive og videreføre mønsteret. Lage formler.

Tekstoppgaver
Analyse av tekstoppgaver. Oversettelse av en tekstoppgave til matematisk språk. Kjennskap til ulike modeller og metoder for å løse tekstoppgaver. Oppgaver som handler om bevegelse av objekter, arbeid som utføres av flere samtidig, stoffblanding, prosent og forholdsregning – likheter mellom ulike type oppgaver.

Elementer av kombinatorikk og sannsynlighetsregning
Egenskaper ved kombinatoriske oppgaver. Løse enkle kombinatoriske oppgaver ved hjelp av ulike modeller. Finne likheter og ulikheter mellom kombinatoriske oppgaver. Utvalg med tilbakelegging

og uten tilbakelegging. Oppgaver i sannsynlighetsregning med «skjult» bruk av union og snitt. Beregne enkle sannsynligheter ved å finne antall muligheter.

Elementer av statistikk
Begrepene søyle-, stolpe- og sirkeldiagram. Framstilling av data v.h.a. ulike typer diagrammer. Begrepet sentralmål. Finne senstralmål som typetall, median og gjennomsnitt i et tallmateriale og vurdere de ulike sentralmål i forhold til hverandre.

Elementer av geometri
Innskrevet og omskrevet sirkel til en mangekant. Analysere egenskaper ved tredimensjonale figurer. Utbrettede figurer.

Måling
Omkrets til sirkel (formel gis uten bevis). Areal av parallellogram, trapes og sirkel. Overflate til tredimensjonale figurer. Bruk av målestokk til å beregne avstander, lage tegninger og diskutere dem. Prosentinnhold av et stoff i blanding.

Koordinatsystem
Begrepet koordinatsystem (førstekoordinat, andrekoordinat, koordinatakser og kvadranter). Finne koordinater til et punkt i et koordinatsystem. Merke av punkter med gitte koordinater. Punkter som ligger symmetriske om origo, x-aksen eller y-aksen. Geometriske figurer i koordinatsystem (lage figurer, finne omkrets og areal i enkle situasjoner).

Funksjoner
Begrepet funksjon. Grafisk framstilling av proporsjonale størrelser. Begrepet stigningstall. Gjenkjenne grafen til en lineær funksjon. Finne likningen til en rett linje. Grafisk framstilling av omvendt proporsjonale størrelser.

Oppbyggingen av grunnbøkene

Grunnbøkene består av følgende kapitler:

Grunnbok 7A	**Grunnbok 7B**
1 Forhold mellom tall	10 Rasjonale tall
2 Å dele et tall i et gitt forhold	11 Regning med rasjonale tall
3 Proporsjoner	12 Koordinatsystem
4 Å løse proporsjoner med et ukjent tall	13 Figurer i koordinatsystem
5 Målestokk	14 Grafisk framstilling av proporsjonale størrelser
6 Proporsjonale og omvendt proporsjonale størrelser	15 Lineære funksjoner
7 Hele tall	16 Grafisk framstilling av omvendt proporsjonale størrelser
8 Addisjon og subtraksjon av hele tall	
9 Multiplikasjon og divisjon av hele tall	

Hvert kapittel består av oppgaver. Disse er gruppert i blokker, der hver blokk består av 2 til 4 oppgaver. Det antas at elevene jobber med én slik blokk per time (45 min), selv om dette ikke er obligatorisk. Den ene oppgaven i hver blokk er en *hovedoppgave* og svarer til et tema som oppgaven knyttes til. De andre er «støtteoppgaver» som er litt mindre i innhold. Meningen med disse oppgavene er at de:

- utvikler og utdyper gjennomgått stoff
- styrker kunnskap og ferdigheter som er oppnådd tidligere
- forbereder til læring av et nytt stoff
- inkluderer viktige innholdsmessige momenter som ikke står som egne temaer i bøkene (tekstoppgaver, kombinatorikk, elementer av algebra og geometri)

På slutten av hvert kapittel er det varierte oppgaver fra hele kapitlet. Det er en samling med litt utfordrende oppgaver til de elevene som trenger det («Hjernetrim») og et forslag til prøve («Test deg selv»).

Oppgavene i grunnbøkene har underpunkter som:

- hjelper til med å utvide et problem eller formulere en problemstilling
- gir tips eller hjelp til de som trenger det
- kan brukes til å skape diskusjon
- fører til analyse av resultatene

Det er oppgaver som skal styrke ferdigheter, men også oppgaver som er utfordrende og kreative.

Det anbefales at man jobber med de første punktene i en oppgave i klasserommet, mens resten kan gjøres hjemme. Men alt er avhengig av situasjonen i klasserommet – læreren bestemmer selv.

Arbeid med oppgavebøker

De to oppgavebøkene er ment å skulle støtte og komplementere grunnbøkene. Oppgavene i disse bøkene er tett knyttet til tilsvarende emner i grunnbøkene. Derfor er det lurt å jobbe med oppgavebøkene parallelt med grunnboka. Samtidig kan noen oppgaver derfra brukes for repetisjon, individuelt arbeid, ulike tester eller prøver (læreren bestemmer!).

Hver oppgavebok inneholder de samme tematiske hovedemnene som grunnbøkene. Oppgavene har ulik vanskegrad. Noen kan løses ved hjelp av hoderegning. I oppgaver med mange liknende underpunkt, er disse forsøkt plassert i økende vanskegrad. Dette er for å hjelpe læreren med å differensiere.

Differensiering

Det er lagt vekt på å framstille stoffet på en induktiv måte, slik at elevene selv finner sammenhenger og løsninger. Dette vil sette mange elever i stand til å arbeide selvstendig, samtidig som det gir dem et godt grunnlag for senere tilegnelse av stoffet. Læreren får dermed også en ekstra mulighet for differensiering ved at stoff kan gjennomgås for grupper av elever, mens andre arbeider selvstendig.

Noen råd knyttet til differensiering:

1. Læreren kan fortelle at det ikke er nødvendig å løse *alle* oppgavene – det er bedre å løse én oppgave riktig enn 10 oppgaver feil. Dette kan hjelpe elever som sliter til ikke å skynde seg, men heller tenke nøye gjennom og rette løsningen han eller hun har funnet flere ganger.
2. De sterke elevene kan oppfordres til å lage egne oppgaver som likner på de som de har jobbet med. Sterke elever har en tendens til å søke kunnskap selv og bør gis mulighet til dette.
   Forskjellen mellom elever på ulike nivå ser man gjerne i antall riktige oppgaver, antall løsningsstrategier og måten de bruker strategier på.

3. Læreren kan hjelpe elever som sliter, mens andre elever jobber selvstendig med oppgaver. Gjennom diskusjon i felleskap kan stoffet presiseres og utdypes. God stemning i klasserommet er meget viktig for alle elevene.
4. For elever som sliter i faget er det viktig å gi ros når de har arbeidet godt, når de våger å hive seg frampå, når de kommer med egne ideer, osv. Det er viktig å styrke selvtilliten deres slik at de får tro på at de kan. Man bør unngå å sammenlikne disse elevene med de som gjør flere oppgaver, dvs. unngå en konkurransestemning. Samtidig er konkurranse viktig for de sterke elevene: hvem som laget flest oppgaver, mer spennende oppgaver?
5. Læreren må bruke ulike måter å oppmuntre elever på.
6. I Zankovs modell prøver man å skape timer der alle elevene, uansett nivå, skal kunne løse både typiske og ikke typiske, utforskende oppgaver.

Forslag til årsplan

Nedenfor har vi satt opp et forslag til årsplan. Forslaget er ment å være veiledende. Det legges til grunn at elevene får omtrent 109 klokketimer med matematikkundervisning i løpet av skoleåret, slik læreplanen tilsier.

I årsplanen er hovedoppgavene (nevnt ovenfor) fordelt på timene. Målene for disse kan hovedsakelig knyttes til kunnskapsområdet tall, tallforståelse, algebra og funksjoner i læreplanen. Andre emner er jevnt fordelt i grunnbøkene, og det forutsettes selvsagt at det også jobbes med disse.

Det bør kommenteres at inndelingen av grunnbøkene i en A- og en B-bok er gjort mest på grunnlag antall sider og ikke så mye med tanke på semesterinndeling. Som det framgår av årsplanen, vil det være naturlig å bli ferdig med Grunnbok 7A et stykke ut i vårsemesteret.

Time	Hovedtema (nr. på hovedoppgave i parentes)
1	Møte med begrepet forhold gjennom små oppgaver (1.1)
2	Begrepet forhold (1.3)
3	Hva viser forhold? (1.6)
4	Forhold uttrykt i prosent (1.9, 1.11)
5	Forholdet mellom to størrelser av samme art (1.13)
6	Forholdet mellom to størrelser av ulik art (1.15, 1.17)
7	Test deg selv
8	Algoritme til å dele et tall i et gitt forhold (2.1)
9	Å dele et tall i et gitt forhold – direkte og motsatte oppgaver (2.4)
10	Å dele et tall i et gitt forhold – repetisjon (2.7)
11	Å dele et tall i et gitt forhold: flere enn to deler (2.10, 2.13)
12	Test deg selv
13	Fra likeverdige brøker til proporsjoner (3.1)
14	Proporsjoner (3.4)
15	Ytterste og midterste tallene i proporsjon (3.7)
16	Kryssmultiplikasjon (3.10)

17	Å lage proporsjoner ved å bruke kryssmultiplikasjon (3.14)
18	Test deg selv
19	Likninger/proporsjoner med ukjent tall (4.1)
20	Algoritme for å løse proporsjoner med et ukjent tall (4.4)
21	Å løse likninger som er skrevet som proporsjoner (4.7)
22	Lek med proporsjoner (4.10, 4.13)
23	Test deg selv
24	Målestokk som et forhold (5.1)
25	Målestokk (5.4)
26	Målestokk og proporsjoner (5.8, 5.13)
27	Test deg selv
28	Proporsjonale størrelser – eksempler (6.1)
29	Tekstoppgaver: Proporsjonale størrelser (6.4)
30	Omvendt proporsjonale størrelser – eksempler (6.7)
31	Tekstoppgaver: Proporsjonale størrelser og omvendt proporsjonale størrelser – løse oppgaver ved hjelp av proporsjoner (6.10, 6.13)
32	Test deg selv
33	Innføring av negative tall (7.1)
34	Addisjon og subtraksjon av negative tall ved bruk av modeller (7.3)
35	Følgen av de hele tall (7.5)
36	Tallinje (7.7)
37	Motsatte tall (7.9)
38	Absoluttverdi (7.12, 7.15)
39	Sammenlikne hele tall (7.18)
40	Algoritme for å sammenlikne hele tall (7.21, 7.24)
41	Test deg selv
42	Addisjon av negative tall (8.1)
43	Addisjon av hele tall (8.3)
44	Uttrykk med negative tall (8.5)
45	Summen av hele tall (8.7)
46	Addisjon av hele tall med samme fortegn – algoritme (8.10)
47	Addisjon av hele tall med ulike fortegn – algoritme (8.13)
48	Subtraksjon av hele tall (8.16)
49	Fortegnet til en differanse av hele tall (8.20)
50	Subtraksjon av hele tall – algoritme (8.24, 8.28, 8.31)
51	Test deg selv
52	Fra addisjon til multiplikasjon (9.1, 9.3)

53	Tilnærming til multiplikasjon av negative tall (9.4, 9.6)
54	Multiplikasjon av to negative tall – en annen tilnærming (9.7)
55	Addisjon og subtraksjon av negative tall (9.10, 9.11)
56	Multiplikasjon av flere negative tall (9.13, 9.16, 9.18)
57	Potenser med negativt grunntall (9.20)
58	Regne med negative tall (9.22, 9.24, 9.26)
59	Divisjon med negative tall (9.27)
60	Multiplikasjon og divisjon med negative tall (9.30)
61	Test deg selv
62	Rasjonalt tall – begrep (10.1)
63	Positive og negative brøker (10.4)
64	Motsatte rasjonale tall (10.8)
65	Motsatte og inverse tall (10.12)
66	Absoluttverdien til et rasjonalt tall (10.16, 10.20)
67	Algoritmen for å sammenlikne rasjonale tall (10.24)
68	Test deg selv
69	Algoritme for addisjon av rasjonale tall – algoritme (11.1)
70	Algoritme for subtraksjon av rasjonale tall (11.4)
71	Addisjon og subtraksjon av rasjonale tall (11.8)
72	Multiplikasjon av rasjonale tall (11.11)
73	Divisjon av rasjonale tall (11.15, 11.19)
74	Regneoperasjoner med rasjonale tall (11.22, 11.25, 11.26)
75	Test deg selv
76	Innføring av koordinatsystem (12.1)
77	Koordinatene til et punkt i et koordinatsystem (1.kvadrant) (12.4)
78	Koordinatene til et punkt i et koordinatsystem (alle kvadranter) (12.7)
79	Koordinatene til et punkt på koordinataksene (12.10)
80	Å lage tegninger i et koordinatsystem (12.14)
81	Punkter som ligger symmetrisk om en koordinatakse (12.17)
82	Punkter som ligger symmetrisk om origo (12.20, 12.23)
83	Test deg selv
84	Linjestykker som er parallelle med en koordinatakse (13.1)
85	Rektangler i koordinatsystem (13.4, 13.7)
86	Ulike figurer i koordinatsystem (13.10, 13.13)
87	Sirkler i koordinatsystem (13.16, 13.20)
88	Figurer i koordinatsystem – areal (13.24)

89	Test deg selv
90	Innføring i emnet proporsjonale størrelser: Modell «Kjøp og salg» (14.1)
91	Kjennskap til funksjonssammenheng (14.4)
92	Funksjonsuttrykk til proporsjonale størrelser (14.7)
93	Stigende og synkende funksjoner (14.10)
94	Hvilke punkt går grafen gjennom? (14.13, 14.16, 14.19)
95	Test deg selv
96	Grafen til en lineær funksjon som ikke går gjennom origo (15.1)
97	Rette linjer med samme stigningstall (15.4)
98	Endring av grafen til en lineær funksjon når konstantleddet endres (15.7)
99	Å tegne grafer til lineære funksjoner. Hvilke punkt går en graf gjennom? (15.10, 15.13, 15.16)
100	Å finne likningen til en rett linje som er parallell med en koordinatakse og til en rett linje som går gjennom to punkter (15.19, 15.22)
101	Å finne likningen til en rett linje som går gjennom et gitt punkt og er parallell med en gitt rett linje (15.25, 15.28)
102	Test deg selv
103	Innføring i emnet: Omvendt proporsjonalitet mellom farten og tiden på en gitt avstand (16.1)
104	Grafen til en hyperbel (1. og 3. kvadrant) (16.4)
105	Grafen til en hyperbel (2. og 4. kvadrant) (16.7)
106	Avgjøre om et punkt ligger på en hyperbel (16.10)
107	Å tegne en hyperbel når man kjenner ett punkt på grafen (16.13)
108	Gjenkjenne en hyperbel (16.16)
109	Test deg selv