Innledning

Denne lærerveiledningen er rettet mot lærere som skal undervise etter læreverket Matematikk 6. Læreverket Matematikk 5-7 bygger på Zankovs undervisningsmodell, og det forutsettes at elevene er blitt undervist etter denne modellen på 5. trinn (fortrinnsvis også på 1.-4. trinn) og at de har brukt tilhørende lærebøker. Lærestoffet i bøkene er en naturlig fortsettelse av lærestoffet på 5.trinn.

Læreverket for 6. trinn består av to grunnbøker med tilhørende lærerveiledninger og to oppgavebøker. Både grunnbøker og oppgavebøker inneholder en kort fasit som elevene selv kan bruke for å sjekke svarene sine.

Zankovs undervisningsmodell

Zankovs modell baserer seg på fem prinsipper som henger tett sammen:

1. Undervisning på et høyt nivå
2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle
3. Rask gjennomgang av stoffet
4. Bevisstgjøring av barna i forhold til egen læringsprosess
5. Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet

Disse teoretiske prinsippene viser veien i opplæringen. Med tanke på implementing i klasserommet utarbeidet Zankov noen metodiske prinsipper som er universielle (dvs. gjelder alle fag): mangfoldighet eller allsidighet, kognitiv konflikt, progresjon og variasjon. Alle læreverk der Zankovs modell brukes, må følge både de teoretiske og metodiske prinsippene.

Gjennom eksempler hentet fra grunnbøkene for 6. trinn, vil vi nå beskrive hva som menes med disse prinsippene.

1. Undervisning på et høyt nivå

La oss bruke oppgave 14.6 fra Grunnbok 6B for å illustrere realisering av dette prinsippet:

14.6

a Regn ut.

i $2{,}4 : 2$ ii $10{,}5 : 5$ iii $7{,}2 : 4$

b Prøv å finne verdiene til kvotientene.

i $2{,}7 : 2$ ii $11{,}6 : 5$ iii $70{,}2 : 4$

Hva er nytt her?
Hvordan løste du problemene med at f.eks. 27 ikke er delelig med 2?

c Hvis du ikke fikk det til, tenk over om likheten 2,7 = 2,70 kan hjelpe deg.

Regn ut.

i $270 : 2$ ii $2{,}70 : 2$ iii $2{,}7 : 2$

d Regn ut.

i $3{,}9 : 2$ iii $0{,}627 : 2$ v $0{,}33 : 5$ vii $5{,}4 : 4$ xi $3{,}6 : 8$ xi $10{,}5 : 25$

ii $8{,}5 : 4$ iv $4{,}2 : 5$ vi $7{,}58 : 5$ viii $5{,}63 : 2$ x $0{,}1 : 8$ xii $2{,}73 : 4$

Til å begynne med vil punkt b) virke utfordrende for elevene. Ved første øyekast kan det se ut som om oppgaven ikke kan løses. Hvis vi imidlertid husker at vi kan føye til nuller bak siste desimal, uten at dette endrer verdien til desimaltallet, så vil vi være i stand til å løse oppgaven. I tilfellet elevene ikke kommer på dette selv, får de hint om det i punkt c). Tanken er at dette skal hjelpe elevene til å overvinne eventuelle vanskeligheter som har oppstått i b) slik at de finner en måte å løse problemet på.

Legg merke til at oppgavene i underpunktene i dette eksempelet har ulik vanskegrad (selv om hovedideen er tatt vare på). Dette gir anledning til å tilpasse vanskegraden til ulike elevene med tanke på hvilket nivå de er på.

Som vi ser av det gitte eksempelet er ikke oppgavene i lærebøkene trivielle. De forutsetter ikke kun reproduksjon, men krever at elevene kommer fram til nye løsningsmetoder og at de sammenlikner ulike metoder. Oppgavene krever kreativitet og en vurdering av forventet resultat.

La oss legge til at vanskeligheter ikke er et mål i seg selv, men en mulighet for å forstå den dypere essensen i lærestoffet, utfordre tanken, overvinne vanskeligheter, skape selvtillit, selvstendighet, motivasjon/interesse, osv.

2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle

Prinsippet om at teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle vises også i kravet om *bevisstgjøring* av elever i forhold til deres egen læringsprosess.

Vi tror det er lurt å stille spørsmål som får elevene til å tenke over hva de gjør og hvorfor (skape relasjonsforståelse). For eksempel – legg merke til at alle spørsmålene begynner med ordet «hvorfor»:

a) Hvorfor kan vi gange teller med teller og nevner med nevner når vi multipliserer to brøker, men **ikke** legge sammen teller med teller og nevner med nevner når vi adderer?

b) Hvorfor må vi snu den bakerste brøken og ikke den første, når vi skal dele to brøker på hverandre?

c) Hvorfor blir verdien til et naturlig tall 10 ganger større når vi setter en null bak siste siffer, mens verdien til et desimaltall ikke endres når vi gjør det samme der?

d) Hvorfor er det slik at 50 er 25 % større enn 40, mens 40 er 20 % mindre enn 50?

e) Hvorfor er det slik at når vi deler et tall med en uekte brøk, så blir svaret større enn tallet vi startet med?

f) Hvorfor bør vi ikke skrive likhetstegn mellom 1 % og $\frac{1}{100}$ når 1 % betyr $\frac{1}{100}$?

Listen kan utvides. Vi mener at det er elevene selv som bør finne svarene på disse og mange andre spørsmål – gjennom utforskende selvstendig arbeid og ved å gå i dybden av problemet. De bør ikke få svarene gjennom ferdig kunnskap og regler. Dette illustrerer hvordan «teoretisk kunnskap har en ledende rolle».

En engasjert lærer kan finne spørsmål ut av egen erfaring, smak og behag og elevene sine interesser. Vi tror at det å inkludere slike spørsmål i læringsprosessen kan gjøre undervisningen enda mer spennende, interessant og produktiv. (Det er selvsagt enda bedre om denne type spørsmål kommer fra elevene selv, og ikke bare fra læreren!)

3. Rask gjennomgang av stoffet

For å illustrere prinsippet om «raskt tempo» (som også kan leses som «skynd deg langsomt»), skal vi se kort på utvikling av emnet «Prosent».

Emnet *prosent* kommer rett etter emnet desimaltall. Det er naturlig at læring av prosent baserer seg på tidligere kunnskap om brøk og desimaltall.

17.1

a Hvor mye er en hundredel av:

i) 300? **ii)** 800? **iii)** 50?

I stedet for hundredel kan vi bruke ordet **prosent**. (Ordet kommer fra latin og betyr «per hundre» eller «for hver hundre».)
Tegnet for prosent er **%**.

b Finn to og to tall i rammen som er slik at det ene er 1 % av det andre. Skriv tallene ved siden av hverandre.

60	3650	80	$33\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0,025	0,6			
$\frac{7}{8}$	$\frac{4}{5}$	$87\frac{1}{2}$	$36\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$

c Finn 1 % av tallene.

i) 400 **ii)** 1200 **iii)** 45 **iv)** 70 000 **v)** 5 **vi)** 0,2

d Her er 1 % av noen tall oppgitt. Finn tallene.

i) 7,5 **ii)** 0,16 **iii)** $\frac{3}{8}$ **iv)** $3\frac{1}{2}$ **v)** 125 **vi)** $\frac{3}{25}$

e Foreslå noen egne tall og finn 1 % av dem.

Basert på det man har lært, går man så videre. Her er et utdrag fra de neste oppgavene som handler om prosent:

17.4

a Finn 1 % av tallene. (Hvor stor del av tallene må du finne da?)

i 600 ii 350 iii 15

b Hva slags mening gir disse symbolene?

2 % 3 % 4 %

Hvis du kjenner 1 % av et tall x, hvor mange ganger større vil 2 % av x være?
Hva med 3 %? 4 %?

17.7

a Finn 10 %, 25 %, 35 % og 80 % av 800.
Hvor stor del av 800 fant du i hvert tilfelle?

17.10

a En fabrikk laget 500 motorer. 3 % av dem var defekte (dvs. at de hadde en feil). Hvor mange defekte motorer laget fabrikken?

Mange av oppgavene som kommer senere handler om å finne en gitt prosent av et tall og om å finne et tall når en viss prosent av tallet er gitt.

Ved å studere eksemplene over ser vi dynamikken til utviklingen av emnet. Oppgavene viser at elevene hver time får en ny oppgave som krever både aktivisering av kunnskap de allerede har og anstrengelse for å skape ny kunnskap.

Senere kommer oppgaver der noe økes eller reduseres med en gitt prosent (både direkte og motsatte oppgaver) samt oppgaver der tall sammenliknes ved bruk av prosent (f.eks. Hvor mange prosent større er 250 enn 200?).

La oss ta noen eksempler som illustrerer en «skjult» måte å repetere stoffet, dvs. repetisjon med obligatoriske elementer av noe nytt. I det første eksempelet repeteres forkorting av brøk.

1.6

a Finn verdien til 20 160 : 1 440.

Se hvordan Øystein gjorde det:

Øystein

$$20\,160 : 1\,440 = \frac{20\,160}{1\,440} = \frac{2016}{144} = \frac{1\,008}{72} = \frac{508}{36} = \frac{252}{18} = \frac{126}{9} = \frac{42}{3} = 14$$

Hvordan har han tenkt? Hvilken regel har han brukt?

b Bruk Øystein sin metode og regn ut.

i 224 : 56	iii 4 320 : 480	v 2 448 : 144
ii 1 664 : 128	iv 1 008 : 168	vi 2 496 : 192

For å løse den neste oppgaven, må elevene bruke det de kan om delelighet:

2.10

a Avgjør, uten regne ut, om verdiene til uttrykkene blir naturlige tall. Begrunn.

i) $2\frac{5}{8} \cdot 72$ **ii)** $22 \cdot 3\frac{3}{4}$ **iii)** $2\frac{7}{12} \cdot 42$ **iv)** $4\frac{8}{15} \cdot 90$

Sjekk svaret ved å regne ut.

b Sett inn naturlige tall slik at verdiene også blir naturlige tall.

i $\frac{3}{4} \cdot \square$ iv $\frac{7}{9} \cdot \square$ vii $3\frac{5}{14} \cdot \square$

ii $\frac{7}{8} \cdot \square$ v $1\frac{3}{5} \cdot \square$ viii $4\frac{7}{18} \cdot \square$

iii $\frac{5}{6} \cdot \square$ vi $2\frac{11}{12} \cdot \square$ ix $\frac{17}{25} \cdot \square$

Sjekk svaret ved å regne ut.

Den neste oppgaven vi har valgt ut, er oppgave 11.8. En analyse av oppgaven viser at punkt a) inneholder to hovedmål – det ene er å repetere og trene på ferdigheter når det gjelder omgjøring fra brøk til desimaltall, mens det andre er å utføre regneoperasjoner med desimaltall. Legg merke til at det er en tydelig økning i vanskegrad.

11.8

a Gjør brøker og blandede tall om til desimaltall og regn ut.

i $2\frac{1}{2} + 3\frac{1}{4}$ iii $0{,}65 + \frac{3}{4}$ v $\frac{5}{8} + 3{,}78$ vii $6\frac{3}{4} + 0{,}675 + 67\frac{1}{2}$

ii $\frac{9}{20} + \frac{9}{25}$ iv $\frac{1}{8} + 0{,}7$ vi $1{,}606 + \frac{48}{125}$ viii $\frac{21}{15} + 0{,}94 + \frac{27}{18}$

b Hvilke av svarene i a) kan skrives som dette på utvidet form?

$70 + 4 + \frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$ $4 + \frac{4}{10} + \frac{5}{1000}$

c Lag en sum av to eller tre desimaltall slik at verdien blir:

i 3 ii 4,5 iii 0,1

d Skriv hvert tall som en sum av desimaltall.

i 1 ii $\frac{1}{2}$ iii $2\frac{1}{4}$ iv $\frac{7}{8}$

Punkt b) er gitt for at elevene skal kunne kontrollere arbeidet sitt (se mer om denne formen for egenkontroll i neste avsnitt). Samtidig får de en repetisjon av hvordan et desimaltall skrives på utvidet form.

Punktene c) og d) forutsetter et kreativt arbeid med å lage summer med en gitt verdien. Det siste punktet er mer komplisert i og med at verdiene til summene er gitt som brøk.

4. Bevisstgjøring av elevene i forhold til egen læringsprosess

Dette prinsippet kan best illustreres gjennom elevenes forståelse av «hvorfor lærer jeg dette stoffet akkurat i denne rekkefølgen, hvordan har kunnskapen som jeg sitter med hjulpet meg, hvilken kunnskap trenger jeg for å løse oppgaven», osv.

Hver oppgave i grunnbøkene eksisterer ikke kun for seg selv, men har både langsiktige og kortsiktige mål, dvs. oppgaven skal brukes til noe. I tillegg tror vi det er lurt å stille spørsmål av typen:

- Hvorfor trenger vi emnet «prosent»?
- Er det ikke enklere å erstatte prosent med desimaltall? Hva vinner vi, og hva taper vi da?
- Prosent har vært i bruk fra Middelalderen av, spesielt i forbindelse med handel og skatt. Hvorfor det, tror dere?

Listen kan utvides i det uendelige.

Med tanke på at elevene skal utvikle selvstendighet og at de i størst mulig grad skal komme fram til kunnskapen på egen hånd, er det veldig viktig å:

- porsjonere ut informasjonen som gis
- optimalisere vanskegraden
- knytte ny kunnskap logisk til det stoffet som allerede er gjennomgått

La oss ta noen eksempler. Det første (oppgave 13.1) handler om å multiplisere et naturlig tall med et desimaltall. For å hjelpe elever som eventuelt står fast, presenteres tre ulike forslag der noen elever har begynt å jobbe med oppgaven.

13.1

a Sammenlikn uttrykkene.

$5 \cdot 185$ | $5 \cdot 18{,}5$ | $5 \cdot 1{,}85$ | $5 \cdot 0{,}85$

Hva må du dele verdien til hvert uttrykk med for å få verdien til det neste? Begrunn.

b Prøv å finne verdien til uttrykket $5 \cdot 1{,}85$.
Se hvordan noen elever startet:

Hadia $5 \cdot 1{,}85 = 5 \cdot 1\frac{85}{100} = 5 \cdot 1\frac{17}{20} = \ldots$

Espen Først finner vi $5 \cdot 185 = 925$.
Siden 185 er 100 ganger så stort som 1,85, så må 925 være ...

Filip $5 \cdot 1{,}85 = 5 \cdot \left(1 + \frac{8}{10} + \frac{5}{100}\right) = 5 \cdot 1 + 5 \cdot \frac{8}{10} + 5 \cdot \frac{5}{100} = \ldots$

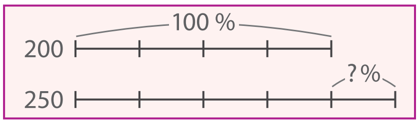
Gjør ferdig utregningene og vis at svaret blir 9,25.

I det neste eksempelet (oppgave 19.6) er målet å gi elever en forståelse av ideen bak prosentvis sammenlikning av to tall og lære dem hvordan dette kan gjøres rent praktisk.

19.6

a Hvor mange prosent større er 250 enn 200?

Bruk modellen hvis du trenger det.



b **Amadi** mener at svaret i a) kan finnes ved uttrykket $\frac{50}{250} \cdot 100$, mens **Wilma** mener at det riktige uttrykket er $\frac{50}{200} \cdot 100$.

Hvem har rett? Begrunn.

Elevene vet hvor mye større 250 er enn 200. Spørsmålet i a) er rettet mot dannelse av den nye kunnskapen som er målet med oppgaven (hvor mange *prosent* større er 250 enn 200). Tegningen gir hint og vise hvilken vei eleven bør gå.

For å lære eleven å lære, gir lærebøkene hjelp i tilfelle eleven står fast. Hjelpen porsjoneres ut på en indirekt måte, ikke instrumentelt, dvs. hjelpen er ikke av typen «slik må det gjøres». I stedet er det snakk om:

- hint som foreslår en mulig tankegang.
- referanse til en liknende oppgaver som elevene har jobbet tidligere.
- start på mulige løsninger som elevene må vurdere (forslaget kan være feil).

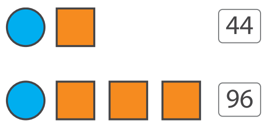
Hjelpen skal med andre ord stimulere tankeprosesser hos elevene og hjelpe dem med å utvikle seg videre – det skal ikke være en ren oppskrift eller «huskeregel». Denne type hjelp passer godt sammen med både de teoretiske og metodiske prinsippene til Zankov.

Her er et enda eksempel på en type hint som skal hjelpe eleven videre:

8.10

a Løs oppgaven. Bruk modellen hvis du trenger det.

Joakim kjøpte en bolle og en sjokolade og betalte 44 kr. May kjøpte en bolle og 3 sjokolader av samme type og betalte 96 kr. Hvor mye koster en bolle og en sjokolade?



b Hvis du står fast, tenk over hvor mye de to ekstra sjokoladene til May koster.

I mange av oppgavene får elevene også anledning til å sjekke om det de har gjort er riktig – elevene må være sikre på at de ikke har gjort noen feil (eller de må forstå at noe er feil, finne feilen og være i stand til å korrigere den). Èn måte å la elevene kontrollere seg selv på, er å gi fasit bak i boka. Dette kan imidlertid sies å være den dårligste formen for egenkontroll (allikevel velger også vi å gjøre dette). Fasitsvaret gir ingen informasjon utover sluttsvaret. Det viser ikke prosessen fram til svaret. Hvis eleven har fått et annet svar enn det som står i fasiten, får de ikke hjelp til å komme seg videre. (Fasiten kan også inneholde trykkfeil, noe som er vanskeligere å oppdage når det kun er et tall som står der.)

Den beste måten å kontrolle seg selv på er, etter vår mening, «indirekte kontroll». Det kan f.eks. gjøres gjennom å studere fiktive elevforslag som vist ovenfor i oppgave 13.1 eller ved at det gis informasjon om noen svar som man burde ha fått. Her er et par eksempler på det siste:

11.8

b Hvilke av svarene i a) kan skrives som dette på utvidet form?

$$70 + 4 + \frac{9}{10} + \frac{2}{100} + \frac{5}{1000}$$

$$4 + \frac{4}{10} + \frac{5}{1000}$$

17.12

c Sjekk at disse tallene var blant svarene du fikk i b):

$$\frac{4}{25} \qquad 2{,}25 \qquad 0{,}0001$$

Det neste eksempelet viser hvordan elevene i punkt b) får spørsmål som indirekte gjør dem i stand til å kontrollere det de har gjort i punkt a) (det kan også fungere som hint dersom elevene stod fast):

6.23

a Sammenlikn tekstoppgavene. Hva er den vesentligste forskjellen mellom dem?

I For å fylle vann i et basseng, kan man bruke to ulike slanger. Den ene fyller bassenget på 14 min, mens den annen bruker 70 min. Hvor lang tid tar det å fylle bassenget hvis begge slangene brukes samtidig?

II To båter starter samtidig og kjører mot hverandre fra motsatte sider av en innsjøen. De møtes etter 10 min. Det tar 14 min for ene båten å krysse innsjøen. Hvor lang tid tar det for den andre?

Løs oppgavene trinn for trinn.

b Hvilket av disse uttrykkene kan brukes for å finne svaret i oppgave I)? Hvilket passer til oppgave II)? Begrunn.

i $1 : \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{14}\right)$ ii $1 : \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{14}\right)$ iii $1 : \left(\frac{1}{14} + \frac{1}{70}\right)$

I oppgave 3.8 blir elevene presentert for et løsningsforslag som er feil. Det er stor sjanse for at elevene har gjort den samme feilen, og de får nå anledning til å korrigere seg selv.

3.8

a Noen elever startet slik da de skulle finne verdien til $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5}$:

Helle $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2\frac{4}{5} = 2 \cdot 2\frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = \ldots$

Einar $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = \frac{5}{2} \cdot \frac{14}{5} = \ldots$

Peter $2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \ldots$

Hadde alle rett? Begrunn.

La oss sette kryss over det som var feil:

$$\cancel{2\frac{1}{2} \cdot 2\frac{4}{5} = 2 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \ldots}$$

Fullfør det som var rett og sjekk at svaret blir det samme.

Et siste eksempel på «indirekte kontroll» som vi vil nevne, er når elevene får beskjed om å løse tekstoppgaver både aritmetisk og algebraisk. Hvis elevene får ulike svar, er dette en indikasjon på at noe er feil.

5. Systematisk og målrettet utvikling av hver eneste elev i klasserommet

Elevene deles ikke inn etter evner. De sammenliknes heller ikke med de andre. Hver elev er unik og lærer i sitt eget tempo ved å jobbe selvstendig og ved å samarbeide med andre. Det er fokus på et obligatorisk minstekrav og deretter en maksimal utvikling. Prinsippet forutsetter at man observerer utviklingen til hver elev. Elever som viser fremgang må få ros. Elever som har vanskeligheter må hjelpes.

Oppgavene i grunnbøkene er laget slik at alle elever skal finne noe for seg selv som fremmer deres utvikling. I samsvar til Zankovs modell er oppgavene laget slik at eleven selv konstruerer kunnskap. Det finnes ikke tradisjonelle forklaringer eller eksempler som viser hvordan en oppgave kan løses, og det er få drilloppgaver i grunnbøkene. Kunnskap formidles ikke, bortsett fra terminologi, symboler og annen informasjon som bør formidles. Hver oppgave består av en rekke spørsmål og oppgaver som knyttes til et emne. Hver oppgave inneholder et problem som eleven bør ha mulighet for å kunne løse. Gjennom en utforskningsprosess kan elevene komme på flere løsningsstrategier. Det er kun en fordel hvis elevene foreslår flere måter å løse en oppgave på. Strategiene diskuteres, og deretter kan man velge de mest effektive og vakre løsningsmetodene.

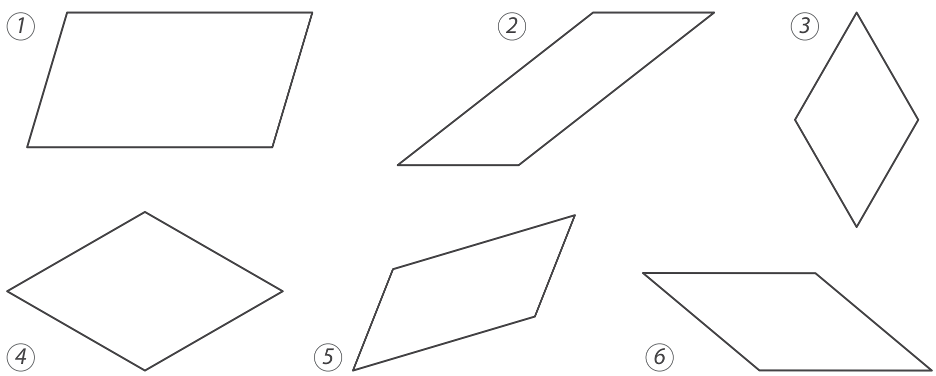
Alle oppgavene inneholder utfordringer på ulike nivå. Som regel er de to første underpunktene ment for alle elevene. Deretter øker vanskegraden gradvis (man forsøker uansett å involvere alle elevene aktivt i læringsprosessen, men etter hvert vil kanskje noen av elevene trenge hjelp).

Oppgave 11.8 (se s. 9 ovenfor) illustrerer realisering av dette prinsippet. Her er oppgaven delt inn i flere deloppgaver av ulik karakter og ulik vanskegrad. Inndelingen gir anledning til å aktivisere alle elevene i produktivt arbeid. Alle elevene kan jobbe i sitt eget tempo og i sin nærmeste utviklingssone.

Oppgave 12.11 har en lav inngangsterskel. Deretter øker vanskegraden. I punkt c) må elevene repetere hvordan omkretsen til en rombe finnes. Egenskapene til en rombe er repetert i punkt b) og vil være til hjelp. I punkt d) er det snakk om å finne areal til romber. Legg merke til hvordan delpunktene i d) også har økende vanskegrad.

12.11

a Hva kalles alle figurene på tegningen?



b Hva kjennetegner parallellogrammene 3, 4 og 6?
Hva kalles slike parallellogrammer?

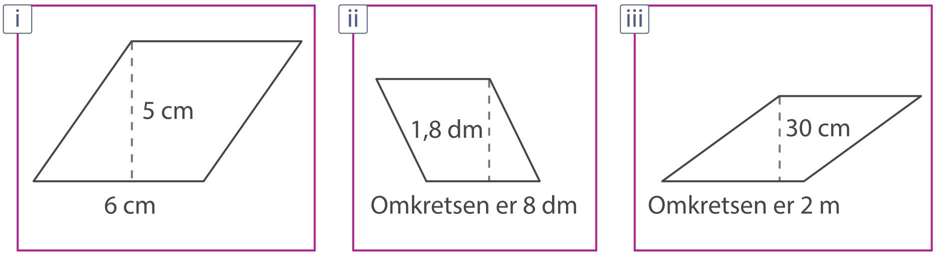
c Hva er sidene i en rombe hvis omkretsen er:

i **48 cm?**

iii **1,2 m?**

ii **8 dm?**

d Hvordan finner vi arealet av en rombe?
Finn arealet av rombene.



Typiske egenskaper ved modellen

De fire didaktiske prinsippene – mangfoldighet/allsidighet, kognitiv konflikt, progresjon og variasjon – kan også sies å være egenskaper eller karakteristikker som beskriver undervisning etter Zankovs modell.

Mangfoldighet/allsidighet i metoder og arbeidsmåter

Gjennom dette prinsippet avsløres, etter vår mening, essensen i faget. Stoffet behandles fra «ulike sider», man sørger for å få fram ulike strategier og å trekke inn elevenes ulike erfaringer. Det er et poeng å involvere elevenes følelser i læringsprossessen.

I tillegg til å skape en atmosfære i klasserommet som er følelsesmessig engasjerende, innebærer prinsippet å vise skjønnheten i matematikken. Denne skjønnheten kan f.eks. vises gjennom at man:

- finner en ny (uventet) måte å løse en oppgave på (se f.eks. 1.10 nedenfor)
- løser en kognitiv konflikt som har oppstått (se avsnittet «Kognitiv konflikt» nedenfor)
- gjetter på en løsning og så sjekker om man hadde rett
- løser et problem på flere ulike måter
- lager egne oppgaver (setter i sving følelser)

La oss vise noen eksempler der denne skjønnheten kommer fram:

1.10

a Løs oppgaven aritmetisk.

På en innsjø er det 50 kanoer. I noen av dem er det 2 personer, og i de andre er det 4. Til sammen er det 146 personer i kanoene. I hvor mange kanoer er det 2 personer og i hvor mange er det 4?

b Hvis du står fast, tenk deg at 2 personer fra hver 4-mannskano, hopper i vannet.

Er antall kanoer endret?
Hva er endret? Hvordan?

c Endre tallet 146 i teksten slik at antall kanoer med 4 personer blir flere enn antall kanoer med 2 personer. Svar på spørsmålet i den nye oppgaven.

I oppgave 1.10 foreslås en «uventet» (og også morsom) strategi: 2 personer fra hver 4-mannskano kan hoppe i vannet. I utgangspunktet var dette en vanskelig oppgave. Etter å ha fått hint om den nye strategien, vil ikke elevene oppfatte oppgaven som vanskelig i det hele tatt.

La oss ta et annet eksempel. Matematikk gir en ofte anledning til å se «likheter i ulikheter». Se for eksempel på disse problemstillingene:

- Hvor lang tid tar det å utføre et arbeid hvis flere jobber samtidig?
- Hvor lang tid tar det å fylle et basseng med vann hvis flere slanger brukes samtidig?
- Hvor lang tid tar det for to personer som beveger seg mot hverandre å møtes?

Oppgaver som dette ser ulike ut, men kan løses ved å bruke samme strategi (se f.eks. oppgave 5.20, 6.20 og 6.23). Å generalisere er en av matematikkens mest vesentlige egenskaper.

Vi mener at det å lage egne oppgaver er en viktig del av læringsprosessen. Det aktiviserer ikke bare kunnskap som elevene har, men også vilje, utholdenhet og følelser. I mange av oppgavene blir elevene bedt om å lage egne oppgaver. Vår erfaring er at dette er en læringsaktivitet som elevene liker godt. Vi tror også at slike aktiviteter fører til både generell utvikling og at det skaper solid kunnskap i et gitt emne. Elevenes oppgaver er neppe perfekte, men de er deres egne.

Arbeidet med å lage slike oppgaver bør ikke være «forgjeves». Elevene kan enten løse sine egne oppgaver, eller de kan la medelever løse dem (individuelt eller i gruppe). De beste oppgavene kan løses i fellesskap i neste time eller læreren kan samle dem i en «oppgavebank» – det finnes mange muligheter. Hva med å organisere en konkurranse eller å lage et hefte med oppgaver, tegninger og bilder av de som har laget oppgavene? Man skal ikke undervurdere hvilken inspirasjon og lærelyst slike aktiviteter kan skape. Følelser både kan og bør fungere som en *kreativ kraft*.

En lærer som bruker Zankovs modell må ha i tankene at opplæring i matematikk ikke bare handler om å utvikle intellektet. Oppgavene eleven jobber med må skape interesse hos eleven, fremme lyst til selvstendig arbeid og til å overvinne vanskeligheter.

Progresjon (kontinuitet)

Zankov mente at læringsstoff ikke burde presenteres tema for tema der man går videre til neste tema etter at elevene har jobbet en stund med det forrige og lært dette godt. Læring er først og fremst en prosess: Ny kunnskap bygger på kunnskapen man har fra før. Tidligere kunnskap bearbeides, man ser på den fra andre vinkler og danner en større struktur med dypere mening (dybdelæring).

Denne egenskapen viser seg f.eks. når:

- elevene arbeider med andre emner parallelt med det som er hovedemnet
- elevene skaper en intuitiv forståelse og blir kjent med et tema som vil være hovedtema en gang i fremtiden
- kunnskap som skapes påvirker hverandre og danner et helhetlig bilde
- elevene får utbytte av hver eneste time gjennom å jobbe med oppgavene

La oss vise hvordan progresjon fungerer ved å se på utvikling av et av de viktigste emnene i skolematematikken, nemlig aritmetikk. I kapittel 1 starter vi å studere brøk systematisk. Brøk er en utvidelse av tallbegrepet. I kapitlene 1-15 er det brøk som er hovedobjektet. I kapitlene 1-6 studeres hovedsakelig regneoperasjoner med brøk. Ved å begrense oss til brøk, utvides dybden på innlæringen av stoffet.

Senere, i kapitlene 7-15, rettes oppmerksomheten på en annen måte å skrive en brøk på – desimaltall. Regning med desimaltall blir en utvidelse av regning med naturlige tall. Ved å utføre beregninger med desimaltall, vil forståelsen for de fire regneartene og posisjonssystemet utvikle seg.

Elevene møter gjerne desimaltall i dagliglivet lenge før emnet behandles på skolen. Erfaringene derfra kan ha gitt dem en overfladisk forståelse av desimaltall (f.eks. at desimaltall består av to naturlige tall adskilt av komma – at komma f.eks. skiller et helt antall kroner fra et helt antall ører, eller et helt antall meter fra et helt antall centimeter). Det er vesentlig at undervisningen hjelper elevene med å rydde opp i eventuelle misoppfatninger. Det er viktig at de ser sammenhengen mellom brøk og desimaltall og at de forstår at et desimaltall er en brøk med nevner 10, 100, 1000, osv. Derfor settes det av mye tid til å jobbe med dette i lærebøkene.

I oppgavene sørges det for at det etableres «broer» mellom brøk og desimaltall:

- Det er mange oppgaver der elevene må gjøre brøk om til desimaltall og omvendt.
- Det er mange oppgaver der elevene skal finne verdien til uttrykk som inneholder både brøk og desimaltall.
- Oppgavene med brøk og desimaltall øker i vanskegrad.

I arbeidet med å gjøre brøk om til desimaltall, vil elevene naturlig stille spørsmål om dette alltid lar seg gjøre. Analysen av dette problemet baserer seg på kunnskap om den multiplikative strukturen til naturlige tall (i dette tilfellet primtallsfaktorisering om det ble jobbet grundig med på 5. trinn).

I kapitlene 16-19 er det prosent som er hovedobjektet. Når elevene har en god forståelse for både brøk og desimaltall, vil ikke prosentregning oppfattes som noe nytt. Det blir bare en utvidelse. Elevene jobber med varierte oppgaver knyttet til begrepet prosent. De bruker ulike representasjoner og jobber med sammenhenger mellom brøk, desimaltall og prosent.

La oss vise med et eksempel hvordan elevene bruker sin gamle kunnskap for å jobbe med et nytt stoff, og hvordan det dermed skapes en følelse av matematisk helhet.

15.1

a **Ingrid** skulle gjøre disse brøkene om til desimaltall:

$$\frac{7}{8} \qquad \frac{9}{250} \qquad \frac{3}{16}$$

Hun gjorde slik:

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{7 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5)} = \frac{875}{1000} = 0{,}875$$

$$\frac{9}{250} = \frac{9}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{9 \cdot (2 \cdot 2)}{2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot (2 \cdot 2)} = \ldots$$

$$\frac{3}{16} = \frac{3}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \ldots$$

Forklar hvordan hun tenkte og gjør ferdig de to siste eksemplene.

De desimaltallene som vi har jobbet med til nå, kalles **endelige desimaltall**. Det er fordi de har et endelig antall desimaler (dvs. et konkret antall siffer etter komma).
Brøkene over ble gjort om til endelige desimaltall.

b Prøv nå å gjøre disse brøkene om til endelige desimaltall.

$$\frac{5}{6} \qquad \frac{7}{15} \qquad \frac{3}{14}$$

Får du det til? Hvis ikke, forklar hvorfor det ikke går.

c Tenk deg at du har en brøk som ikke kan forkortes. I hvilke tilfeller kan brøken gjøres om til et endelig desimaltall og i hvilke tilfeller er umulig å gjøre det?

La b være en brøk som ikke kan forkortes.

b kan gjøres om til et endelig desimaltall hvis primtallsfaktorisering av nevneren ikke inneholder andre primtall enn 2 og 5.

b kan ikke gjøres om til et endelig desimaltall hvis primtallsfaktorisering av nevneren ikke bare inneholder primtallene 2 og 5.

d Finn brøkene som kan gjøres om til endelige desimaltall. Begrunn valget og skriv deretter tallene som endelige desimaltall.

$$\frac{2}{15} \quad \frac{79}{20} \quad \frac{9}{16} \quad \frac{47}{30} \quad \frac{201}{625} \quad \frac{77}{88} \quad \frac{1}{144} \quad \frac{13}{80} \quad \frac{5}{32} \quad \frac{121}{700}$$

Legg merke til at denne oppgaven også illustrerer Zankovs andre prinsipp om at teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle i læringsprosess.

Gjennom realiseringen av prinsippet om progresjon, får elevene en stadig dypere forståelsen (dybdelæring) av det å skrive et tall som en brøk eller et desimaltall.

Kognitiv konflikt

Dette mener vi er den viktigste egenskapen ved modellen. Derfor vil vi skrive mer utfyllende om denne enn om de andre.

Kognitive konflikter:

a) hjelper en å forstå et problem dypere
b) skaper interesse for faget
c) skaper lærelyst
d) motiverer til utforskende og selvstendig arbeid
e) hjelper en å komme på et nytt nivå av forståelse
f) tillater en å se estetiske sider ved matematikk

La oss se noen eksempler på hva som menes med slike konflikter.

1. Når noe strider imot tidligere erfaring eller sunn fornuft

Dette er en viktig type kognitiv konflikt som ikke bare gir mulighet til å se på et problem på en annen måte, men også til en viss grad erstatte eksisterende kunnskap. Et eksempel på dette finner vi i oppgavene 5.1, 5.3, 5.6 og 5.10 der elevene erfarer at divisjon ikke alltid gir et svar som er mindre enn dividenden. Dette er en av de mest vesentlige kognitive konflikten på 6. trinnet.

La oss komme med et annet eksempel. Det handler om gjennomsnittsfart, og selv om vanskegraden kanskje ligger litt over pensumet for 6.trinn (en oppgave liknende punkt b) gis som hjernetrim i kapittel 3), er oppgaven lærerik.

Oppgave

a) En bil kjørte halvparten av tiden med 60 km/t og den andre halvparten med 40 km/t. Hva var gjennomsnittsfarten?

b) En bil kjørte fra en by til en annen med en fart på 60 km/t. Den snudde og kjørte tilbake samme vei med en fart på 40 km/t. Hva var gjennomsnittsfarten?

Som alltid anbefaler vi at elevene først sier hva som er den viktigste forskjellen mellom oppgavene.

For å løse den første oppgaven, la t være halvparten av tiden. Da får vi at:

$$v = \frac{60 \cdot t + 40 \cdot t}{t + t} = 50 \text{ (km/t)}$$

For å løse den andre oppgaven, la s være strekningen mellom de to byene. Da får vi at:

$$v = \frac{2s}{\frac{s}{60} + \frac{s}{40}} = 48 \text{ (km/t)}$$

At svaret ikke blir det samme, vil sannsynligvis komme som en stor overraskelse for elevene.

2. Å forstå et problem dypere

Se f.eks. på oppgave 10.1 (å føye til nuller bak siste desimal endrer ikke verdien til et desimaltall). Elevene er vant til at det å føye til nuller bak et tall, gjør at man får et tall med en verdi som er 10, 100, osv. ganger så stor. Men dette er ikke tilfellet når vi føyer til nuller bak siste desimal i et desimaltall! Hvorfor ikke?

Her har vi tilsynelatende en motsigelse – en kognitiv konflikt. For å løse konflikten er det nødvendig å gå dypere inn i problemet og ikke bare å lære seg en regel utenat. Ved å gjennomføre oppgave 10.1 og analysere problemet, løser elevene den kognitive konflikten.

Senere vil elevene oppdage hvilken nytte de kan ha av denne egenskapen (når de skal sammenlikne desimaltall, addere eller subtrahere desimaltall osv.). Elevene bør selvsagt se sammenhengen mellom denne egenskapen og egenskapen til likeverdige brøker, f.eks. $1{,}2 = \frac{12}{10} = \frac{12 \cdot 10}{10 \cdot 10} = \frac{120}{100} = 1{,}20$. Dette illustrerer hvordan teoretisk kunnskap har en ledende rolle.

3. Å se ulikheter selv om oppgaver ser like ut

Mange nye idéer og løsningsmetoder introduseres gjennom å sammenlikne oppgaver som ser like ut. For eksempel:

1.24

a Hva er felles og hva er forskjellig for disse tekstoppgavene?

I Nora syklet først 2 timer med en fart på 20 km/t. Deretter syklet hun 1 time med 30 km/t og 2 timer med 25 km/t. Hva var gjennomsnittsfarten?

II Nora syklet først 2 timer med en fart på 20 km/t. Deretter tok hun en pause på 1 time, før hun syklet 2 timer med 25 km/t. Hva var gjennomsnittsfarten? (Pausen skal regnes med.)

I hvilken oppgave vil gjennomsnittsfarten være minst. Begrunn. Lag uttrykk som passer til oppgavene. Finn verdiene til uttrykkene.

b Hva må endres i opplysningene til den andre oppgaven hvis svaret skal kunne finnes ved hjelp av uttrykket $\frac{2 \cdot 20 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 25}{2 + 2 + 1}$? Løs den nye oppgaven.

c Lag en tekstoppgave der man skal finne en gjennomsnittsfart som er gitt ved uttrykket $\frac{3 \cdot 56 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 72}{\square}$.

Når man sammenlikner oppgavene i a) og prøver å forutsi svaret, oppstår det en kognitiv konflikt: Vil en pause påvirke gjennomsnittsfarten? I så fall på hvilken måte? Denne situasjonen likner på situasjonen i oppgave 349 i Grunnbok 5B der det dreide seg om hva som ville skje med gjennomsnittet av en samling med tall dersom vi la til noen nuller. Kanskje noen elever vil legge merke til denne sammenhengen – i så fall har man en god anledning til diskusjon. I punkt b) blir det gitt indirekte hjelp, og i punkt c) utvikles stoffet videre og vanskegraden øker. (Se f.eks. oppgave 1.28, 3.13, 4.10, 6.2 og 19.9 for flere eksempler.)

4. Å se likheter selv om oppgaver ser ulike ut

Det er viktig at elevene legger merke til likheter mellom brøk og desimaltall. De må ikke oppfatte brøk og desimaltall som ulike objekter. Selv om f.eks. $\frac{1}{2}$ og 0,5 ser ulike ut, er det bare snakk om to forskjellige måter å skrive det samme tallet på (ulike representasjoner).

I dette læreverket studeres derfor desimaltall grundig rett etter at brøkregning er gjennomgått. Sammenhengen mellom brøk og desimaltall undersøkes hele tiden, og når elevene skal utføre regneoperasjoner legges det vekt på at de bør finne den mest mulig effektive måten å skrive tallene på.

Variasjon

Denne egenskapen handler først og fremst om planlegging og organisering av timene:

1. Tidsrammen til hvert tema kan endres selv om det gis et forslag til hver time.

   Opplæringen er rettet mot utvikling av hver elev. Derfor er arbeidsmåter, rekkefølge, innhold og oppgavetyper avhengig av de individuelle evnene til hver enkelt elev og kan varieres. Oppgavene er varierte i struktur, måten å jobbe på (muntlig, skriftlig) og vanskegrad.

   Disponering av tid er relativ i Zankovs klasser. Hvis læreren mener at det går bra med et emne, kan tiden reduseres. Hvis ikke, kan man bruke litt mer tid. Derfor er forslaget til årsplan nedenfor relativt.

2. Variasjon bestemmer strukturen av timen.

   Når en time planlegges, er det flott om læreren viser kreativt initiativ når det gjelder valg av arbeidsmåter, innhold og oppgavetyper, forutsatt at de didaktiske prinsippene beholdes.

3. Man kan velge en passende vanskegrad.

   Oppgavene i grunnbøker og oppgavebøker er varierte når det gjelder både struktur og vanskegrad. Ved å velge og variere vanskegrad på oppgaver som tilbys til den enkelte elev eller elevgruppe, har læreren mulighet til å gjennomføre tilpasset opplæring.

4. Man kan endre rekkefølgen av oppgavene hvis læreren finner det fornuftig. Læreren oppfordres til å bruke sin kreativitet f.eks. til å lage egne oppgaver og i valg av metoder.

Zankovs modell forutsetter at eleven er i stand til å jobbe selvstendig med stoffet i læreboka. Forklaring av stoffet er minimert, og når det gis eksempler på hvordan en oppgave kan løses, er det for at eleven skal kunne sjekke sin egen løsning (se eksempler angående egenkontroll under beskrivelsen av prinsipp 4).

Repetisjonsoppgaver er preget av noe nytt, og det kreves en kreativ tilnærming fra elevens side (se eksempler angående repetisjon under beskrivelsen av prinsipp 2). Kunnskap presenteres ikke i en gitt form. Den konstrueres av eleven gjennom læringsaktiviteter.

Hver oppgave består av «læringsspørsmål», oppgaver og noen forklaringer til et gitt tema. I hver oppgave gis det et problem, som eleven er i stand til å løse. I en utforskningsprosess kommer elevene som regel på flere måter å løse oppgaven på. Man bør diskutere de ulike løsningsstrategiene og velge den mest interessante, vakre eller effektive løsningen. På den måten får elevene anledning til å se på problemet fra ulike sider og dermed utvikle seg videre.

I oppgave **17.10** skal elevene løse følgende oppgave:

a En fabrikk laget 500 motorer. 3 % av dem var defekte (dvs. at de hadde en feil). Hvor mange defekte motorer laget fabrikken?

Etter å ha prøvd seg på oppgaven selv, skal elevene sammenlikne det de har gjort med det noen fiktive elever har gjort:

Hedda
1. Vi finner 1 % av 500: $\frac{1}{100} \cdot 500 = 5$
2. Vi finner 3 % av 500: ...

Jonas
3 % er det samme som $\frac{3}{100}$ som igjen er det samme som 0,03.
For å finne 3 % av tallet, kan vi gange det med 0,03. ...

Arja
For å løse oppgaven kan vi gjøre slik: $\frac{3 \cdot 500}{100} = \ldots$

Et annet eksempel – i oppgave 17.13 er følgende oppgave gitt:

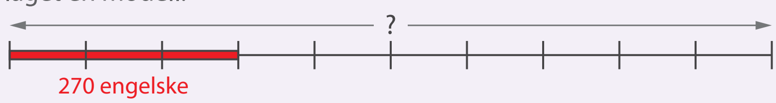
17.13

II Et skolebibliotek har 270 bøker på engelsk. Disse utgjør 30 % av alle bøkene. Hvor mange bøker har biblioteket?

Igjen gis starten på noen løsningsforslag som elevene kan bruke for egenkontroll:

b Sammenlikn det du gjorde i oppgaven II) med det disse elevene har gjort:

Felix laget en modell:



Signe resonnerte slik: «1 % av antall bøker på biblioteket må være: 270 : 30 = ...
Da må 100 % være...»

Jakob begynte slik: «La x stå for antall bøker på biblioteket.
Av oppgaveteksten ser vi at x må passe
i likningen $\frac{30}{100}x = 270$ eller $0{,}3x = 270$...»

Elevene får beskjed om å gjøre ferdig alle løsningene. De sammenlikner metodene, og tanken er at de i senere oppgaver velger den som passer best i en gitt situasjon.

Som vi ser gir variasjon muligheter for samspill mellom lærer og elever. I praksis realiseres de teoretiske og metodiske prinsippene i hver oppgave – dette kan man se det ved å studere dem grundig.

Oppgavene over er bare noen eksempler der prinsippene og egenskapene vises ekstra tydelig.

Noen karakteristikker ved timen

1. Timen bør være dynamisk – stoffet gjennomgås i et raskt tempo. Det bør være interessent for elever å være tilstede i timen. De må være aktive og vise interesse for det de driver med. Læreren må ikke føle seg låst av rutiner. Det er viktig å unngå at elevene kjeder seg. Derfor bør man bruke ikke for mye tid på det samme. Man bør også unngå for mye gjentakelse i timen. Læreren bør i det hele tatt være opptatt av at det skal være livlig i klasserommet.
2. Læreren må være fleksibel og åpen. Emosjonell komfort i timen og det at det skapes en god stemning i klasserommet er viktig for læringsprosessen. Elevene må ikke være redde for å gjøre feil. Finn noe som barnet kan gis ros for (det må være ekte). Elevene bør ikke sammenliknes med hverandre, men med seg selv. Det er vesentlig å involvere **alle** elevene, noe som innebærer å tilpasse nivået.
3. Læreren må forstå hensikten med hver eneste oppgave som velges (hva er det den utvikler?). Videre må hver elev ha utbytte av **hver** time.
4. Det meste av tiden i klasserommet brukes på at elevene jobber selvstendig eller at klassen diskuterer ulike løsningsstrategier. Oppgavene har ulik vanskegrad, og man bør sørge for å inkludere oppgaver som passer bra for de som strever slik at de blir tryggere og stoler på seg selv.

Oppbyggingen av timene kan skjematisk beskrives slik:

1. Læreren formulerer en problemstilling som svarer til det som er hovedtema i timen.
2. Elevene leter etter løsningsstrategier, diskusjoner settes i gang, og det foregår en utveksling av ideer.
3. Læreren dirigerer prosessen og leder diskusjonen mot de mest aktuelle aspektene ved temaet.
4. Når problemet som hører til hovedtemaet er løst, diskuteres resultatene og uklarheter elimineres.
5. Elevene jobber med oppgaver med sikte på å konsolidere den tilegnede kunnskapen og danne grunnleggende ferdigheter.
6. Læreren gir elever mulighet til å utveksle meninger. Elevene kan lage egne oppgaver eller legge frem forslag til hvordan man kan jobbe videre med dette emnet osv.
7. Læreren oppsummerer timen og vurderer elevenes innsats. I den forbindelse legges det større vekt på aktiv deltakelse i læringsprosessen enn på resultatoppnåelse.

I vedlegg fra s. 172 og utover finner leseren utdrag fra klasserommet. Utdragene inneholder tenkte samtaler mellom lærer og elever med utgangspunkt i oppgaver eller tema fra grunnbøkene. Vi anbefaler å lese disse matematiske samtalene før man går i gang med undervisningen.

Her gis noen kortere utdrag for å vise hvordan oppgavene kan brukes i undervisningen.

Fragment 1

Tema: Del av et tall og prosent av et tall (oppgave 17.7)

(Dette er 3. time som handler om prosent.)

Mål for timen: Elevene skal kunne etablere sammenheng mellom brøk og prosent. Deretter må de komme fram til en metode for å gjøre brøk om til prosent og prosent om til brøk.

Først repeteres stoff fra tidligere økter – elevenes kunnskap aktiviseres:

17.7

a) Finn 10 %, 25 %, 35 % og 80 % av 800.

Lærer: Hvor stor del av 800 fant dere i hvert tilfellet?

Et problem som hører til målet for timen settes opp, og diskusjonen er i gang. Videreføring av diskusjonen kan stimuleres med spørsmål:

b Finn $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{25}$ og $\frac{2}{5}$ av 400.

Hvor mange prosent av 400 fant du i hvert tilfelle?

Diskusjonen kan fortsettes og avsluttes med følgende spørsmål:

c Tenk over hvordan brøk kan gjøres om til prosent på en enklest mulig måte.
Hva med motsatt – hvordan kan prosent gjøres om til brøk?

Det elevene kommer fram til sammenliknes med det som står i læreboka:

> *Når vi skal gjøre brøk om til prosent, kan vi multiplisere brøken med 100.*
>
> *Når vi skal gjøre prosent om til brøk, kan vi dele prosenttallet med 100. Da setter vi prosenttallet i telleren og 100 i nevneren.*

For å gi elevene anledning til å fastsette ferdigheter, kan læreren gi dem følgende oppgave:

d Skriv av tabellen og fyll ut det som mangler.

Del av et tall	$\frac{13}{100}$		$\frac{3}{5}$		$\frac{11}{20}$		$\frac{24}{25}$	
Prosent av et tall	13 %	75 %		24 %		95 %		12,5 %

De siste underpunktene er tekstoppgaver knyttet til målet for timen. Kanskje velger man å gjøre ett av punktene på skolen og de andre hjemme:

e To skiskyttere skjøt 40 skudd hver. Den ene traff blinken med $\frac{5}{8}$ av skuddene, mens den andre traff med 65 % av skuddene. Hvem hadde flest treff?

f $\frac{2}{5}$ av elevene i en klasse var gutter. Hvor mange prosent av elevene var jenter?

g Hvor mange prosent av elevene i klassen din er gutter? (Hvis du ikke kan gi et nøyaktig svar, så gi et overslag.)

Fragment 2

Tema: Sammenlikne desimaltall (oppgave 10.1)

Mål: Elevene skulle komme fram til en konklusjon om at verdien til et desimaltallet ikke endres hvis det føyes til nuller bak siste desimal.

Først aktiviseres elevenes kunnskap – hva skjer med verdien til et naturlig tall når vi føyer til en eller flere nuller bak siste siffer?

10.1

a Sammenlikn tallene.

i) 5 og 50 **ii)** 328 og 32 800 **iii)** 1 og 1000

På hvilken måte endrer verdien til et naturlig tall seg, når vi føyer til en eller flere nuller bak siste siffer?

Et problem som hører til målet for timen settes opp:

b Tenk over om disse tallene har ulik verdi. Begrunn.

i) 0,5 og 0,50 **ii)** 3,28 og 3,2800 **iii)** 0,1 og 0,1000

Endrer verdien til et desimaltall seg hvis vi føyer til nuller bak siste desimal?

Her stilles det spørsmål om de reglene som gjelder for naturlige tall også gjelder for desimaltall. Dermed skapes det en kognitiv konflikt. Det mest sannsynlige er at elevene i dette tilfellet får en følelse av at de ikke kan nok om desimaltall til å kunne svare på spørsmålet – kunnskapen de har strekker ikke til. Læreren oppfordrer elever til å komme med forslag, og det skapes en diskusjon i klasserommet. Elevene svarer på spørsmål og begrunner. Læreren styrer samtalen ved å legge merke til hvilke av elevenes tanker som vil kunne hjelpe dem i retning av å løse problemet.

Etter diskusjonen kan læreren be elever å lese det som står i læreboka, eller eventuelt vise dette på skjerm (egenkontroll):

d Se hva to elever gjorde:

Karen

$$3{,}28 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100}$$

$$3{,}2800 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{8}{100} + \frac{0}{1000} + \frac{0}{10\,000}$$

Forklar likhetene hennes. Betyr dette at 3,28 = 3,2800?

Ali

$$3{,}28 = 3\frac{28}{100}$$

$$3{,}2800 = 3\frac{2800}{10\,000}$$

Sammenlikn tallene $3\frac{28}{100}$ og $3\frac{2\,800}{10\,000}$ og kom fram til en konklusjon.

Diskusjonen er ferdig, og elevene blir bedt om å komme med liknende argumenter på egenhånd.

e Vis at likhetene er sanne. **i** $37{,}4 = 37{,}400$ **ii** $0{,}480 = 0{,}48$ **iii** $6{,}000 = 6$

Elevene kommer til fram til en konklusjon som kan sammenliknes med den som står i læreboka:

Verdien til et desimaltallet endres ikke hvis vi:
- *føyer til nuller bak siste desimal.*
- *ta bort nuller som står helt til slutt i desimaltallet.*

Det siste underpunktet kan elevene gjøre hjemme:

f Finn tall med samme verdi og lag likheter eller kjeder av likheter. Forleng likhetene med to egne tall.

0,2	9,0	0,705	90,0	0,7500	0,202	0,0705	2,0	0,022
0,2020	9,00	0,075	20,0	0,75	0,20	9	0,750	0,7050

Oversikt over innholdet i grunnbøkene

Brøk
Regning med brøk: addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon.

Desimaltall
Begrepet desimaltall. Omgjøring: desimaltall ↔ brøk. Utvidet form. Sammenlikne. Regning med desimaltall. Avrunding. Kriteriet om å gjøre brøk om til desimaltall. Periodiske desimaltall.

Prosent
Prosent som en type av en brøk. Å finne prosent av et tall eller å finne et tall når man vet prosenten av tallet. Øke og redusere noe med en gitt prosent. Sammenlikning av tall v.h.a. prosent (f.eks. Hvor mange prosent er m av n?).

Elementer av algebra
Bokstavuttrykk. Likninger og ulikheter med brøk og desimaltall.

Tekstoppgaver
Analyse av tekstoppgaver. Oversettelse av en tekstoppgave til matematisk språk. Kjennskap til ulike modeller. Klassifisering av tekstoppgaver etter egenskaper: felles innhold, modell, løsningsstrategi. Aritmetisk og algebraisk metode for å løse tekstoppgaver. Kreative oppgaver knyttet til det å lage oppgaver som passer til en gitt modell.

Oppgaver som handler om bevegelse av objekter (som starter samtidig eller til ulik tid, beveger seg mot hverandre, fra hverandre eller etter hverandre), arbeid som utføres av flere samtidig – likheter mellom ulike type oppgaver. Tekstoppgaver med prosent. Oppgaver der det er en sammenheng mellom deler, av type «… flere/færre enn», «… ganger så stor som», o.l.

Elementer av kombinatorikk og sannsynlighetsregning
Angi en hendelse som umulig, svært lite trolig, lite trolig, det er vanskelig å si, trolig, svært trolig, helt sikker. Tilfeldige hendelser. Egenskaper ved kombinatoriske oppgaver. Enkle kombinatoriske oppgaver. Bruk av ulike modeller som f.eks. graf og trediagram for å visualisere en kombinatorisk oppgave.

Produktregelen i kombinatorikk. Utvalg med tilbakelegging og uten tilbakelegging. Oppgaver i sannsynlighetsregning med «skjult bruk» av union og snitt. Finne sannsynligheten ved å dele gunstige utfall på mulige.
Forskjellen mellom kombinatoriske oppgaver og oppgaver i sannsynlighet.

Elementer av statistikk
Framstille data v.h.a. ulike typer diagrammer.

Elementer av geometri
Halveringslinje, utvendig vinkel ved hjørne, median i en trekant, høyde i en trekant, vinkelsum i trekant. Regulære mangekanter. Speiling om en linje og om et punkt, symmetri om en linje og om et punkt. Egenskaper til parallellogram, rombe, trapes.

Måling
Omkrets av mangekanter. Areal av rektangel, trekant, parallellogram. Volum av rett, rektangulært prisme. Målestokk. Regne med fart. Gjennomsnittsfart.

Oppbygningen av grunnbøkene

Grunnbøkene består av følgende kapitler:

Grunnbok 6A	**Grunnbok 6B**
1 Addisjon og subtraksjon med brøk 2. Multiplikasjon og divisjon med brøk og helt tall 3 Multiplikasjon med brøk 4 Inverse tall 5 Divisjon med brøk 6 Regning med brøk 7 Forberedelse til desimaltall	8 Desimaltall 9 Å skrive desimaltall på utvidet form 10 Sammenlikning av desimaltall 11 Addisjon og subtraksjon med desimaltall 12 Multiplikasjon og divisjon av desimaltall med 10, 100, 1000… 13 Multiplikasjon med desimaltall 14 Divisjon med desimaltall 15 Å gjøre om fra brøk til desimaltall 16 Avrunding av brøk til desimaltall 17 Prosent 18 Prosentvis økning og prosentvis reduksjon 19 Hvor mange prosent?

Hvert kapittel består av oppgaver. Disse er gruppert i blokker, der hver blokk består av 2 til 4 oppgaver. Det antas at elevene jobber med én slik blokk per time (45 min), selv om dette ikke er obligatorisk. Den ene oppgaven i hver blokk er en *hovedoppgave* og svarer til et tema som oppgaven knyttes til. De andre er «støtteoppgaver» som er litt mindre i innhold. Meningen med disse oppgavene er at de:

- utvikler og utdyper gjennomgått stoff
- styrker kunnskap og ferdigheter som er oppnådd tidligere
- forbereder til læring av et nytt stoff
- inkluderer viktige innholdsmessige momenter som ikke står som egne temaer i bøkene (tekstoppgaver, kombinatorikk, elementer av algebra og geometri)

På slutten av hvert kapittel er det varierte oppgaver fra hele kapitlet. Det er en samling med litt utfordrende oppgaver til de elevene som trenger det («Hjernetrim») og et forslag til prøve («Test deg selv»).

Oppgavene i grunnbøkene har underpunkt som:

- hjelper til med å utvide et problem eller formulere en problemstilling
- gir tips eller hjelp til de som trenger det
- kan brukes til å skape diskusjon
- fører til analyse av resultatene

Det er oppgaver som skal styrke ferdigheter, men også oppgaver som er utfordrende og kreative.

Det anbefales at man jobber med de første punktene i en oppgave i klasserommet, mens resten kan gjøres hjemme. Men alt er avhengig av situasjonen i klasserommet – læreren bestemmer selv.

Arbeid med oppgavebøker

De to oppgavebøkene er ment å skulle støtte og komplementere grunnbøkene. Oppgavene i disse bøkene er tett knyttet til tilsvarende emner i grunnbøkene. Derfor er det lurt å jobbe med oppgavebøkene parallelt med grunnboka. Samtidig (læreren bestemmer!) kan noen oppgaver derfra brukes for repetisjon, individuelt arbeid, ulike tester eller prøver.

Hver oppgavebok inneholder de samme tematiske hovedemnene som grunnbøkene. En vesentlig plass vies til aritmetikk (tallregning). Ikke alle emner fra grunnbøkene er viet tilsvarende plass i oppgavebøkene. F.eks. er hovedarbeidet med tekstoppgaver lagt til grunnbøkene. Samtidig legges det stor vekt på geometri i oppgavebøkene. Algebraoppgavene er først og fremst rettet mot det å løse og lage likninger.

Oppgavene i oppgavebøkene har ulik vanskegrad. Noen kan løses ved hjelp av hoderegning. I oppgaver med mange liknende underpunkt, er disse forsøkt plassert i økende vanskegrad. Dette for å hjelpe læreren med å differensiere.

Differensiering

Det er lagt vekt på å framstille stoffet på en induktiv måte, slik at elevene selv finner sammenhenger og løsninger. Dette vil sette mange elever i stand til å arbeide selvstendig, samtidig som det gir dem et godt grunnlag for senere tilegnelse av stoffet. Læreren får dermed også en ekstra mulighet for differensiering ved at stoff kan gjennomgås for grupper av elever, mens andre arbeider selvstendig.

Noen råd knyttet til differensiering:

1. Læreren kan fortelle at det ikke er nødvendig å løse *alle* oppgavene – det er bedre å løse én oppgave riktig enn 10 oppgaver feil. Dette kan hjelpe elever som sliter til ikke å skynde seg, men heller tenke nøye gjennom og rette løsningen han eller hun har funnet flere ganger.
2. De sterke elevene kan oppfordres til å lage egne oppgaver som likner på de som de har jobbet med. Sterke elever har en tendens til å søke kunnskap selv og bør gis mulighet til dette. Forskjellen mellom elever på ulike nivå ser man gjerne i antall riktige oppgaver, antall løsningsstrategier og måten de bruker strategier på.
3. Læreren kan hjelpe elever som sliter, mens andre elever jobber selvstendig med oppgaver. Gjennom diskusjon i felleskap kan stoffet presiseres og utdypes. God stemning i klasserommet er meget viktig for alle elevene.
4. For elever som sliter i faget er det viktig å gi ros når de har arbeidet godt, når de våger å hive seg frampå, når de kommer med egne ideer, osv. Det er viktig å styrke selvtilliten deres slik at de får tro på at de kan. Man bør unngå å sammenlikne disse elevene med de som gjør flere oppgaver, dvs. unngå en konkurransestemning. Samtidig er konkurranse viktig for de sterke elevene: hvem som laget flest oppgaver, mer spennende oppgaver?
5. Læreren må bruke ulike måter å oppmuntre elever på.
6. I Zankovs modell prøver man å skape timer der alle elevene, uansett nivå, skal kunne løse både typiske og ikke typiske, utforskende oppgaver.

Forslag til årsplan

Nedenfor har vi satt opp et forslag til årsplan. Forslaget er ment å være veiledende. Det legges til grunn at elevene får omtrent 109 klokketimer med matematikkundervisning i løpet av skoleåret, slik læreplanen tilsier.

I årsplanen er hovedoppgavene (nevnt ovenfor) fordelt på timene. Målene for disse kan hovedsakelig knyttes til området «Tall og algebra» i læreplanen. Andre emner er jevnt fordelt i grunnbøkene, og det forutsettes selvsagt at det også jobbes med disse.

Time	Hovedtema (nr. på hovedoppgave i parentes)
1	Addisjon og subtraksjon av brøk med like nevnere (1.1)
2	Addisjon og subtraksjon av brøk med ulike nevnere. Fellesnevner (1.3)
3	Subtraksjon av brøk ved å finne minste fellesnevner (1.5)
4	Addisjon og subtraksjon av brøk ved å finne minste fellesnevner (1.9)
5	Addisjon og subtraksjon av brøk med ulike nevnere (1.13)
6	Addisjon og subtraksjon av brøk der minste felles nevner er lik den ene nevneren (1.15)
7	Addisjon og subtraksjon av brøk der nevnerne er relativt primiske (1.19)
8	Addisjon og subtraksjon av blandede tall (1.23, 1.26)
9	Test deg selv
10	Multiplikasjon der første faktor er et naturlig tall og andre faktor er en brøk (2.1)
11	Multiplikasjon der første faktor er en brøk og andre faktor er et naturlig tall (2.4)
12	Multiplikasjon av et blandet tall med et naturlig tall (2.7)
13	Divisjon av brøk med et naturlig tall (2.15)
14	Divisjon av brøk med et naturlig tall (2.19)
15	Divisjon av et blandet tall med et naturlig tall (2.23)
16	Test deg selv
17	Multiplikasjon med brøk – algoritme (3.1)
18	Multiplikasjon med brøk – valg av effektiv strategi (3.5)
19	Multiplikasjon med blandede tall (3.8)
20	Multiplikasjon med brøk – flere enn to faktorer (3.10)
21	Test deg selv
22	Inversen til et tall (4.1)
23	Inversen til en brøk – algoritme (4.4)
24	Inverse tall på en tallinje (4.8)
25	Sannsynlighet (4.11)
26	Test deg selv
27	Divisjon av et tall med brøk (5.1)
28	Divisjon av et tall med brøk (5.3, 5.6)
29	Erstatte divisjon med multiplikasjon (5.10)
30	Divisjon av en brøk med en brøk (5.13)
31	Divisjon med blandede tall (5.17)
32	Tekstoppgaver: «arbeid» som utføres av flere sammen (5.20)
33	Test deg selv
34	Kommutative og assosiative egenskaper ved addisjon og multiplikasjon (6.1, 6.4)
35	Den distributive loven for multiplikasjon (6.8)
36	Løse likninger (6.11)
37	Løse likninger (6.18)
38	Regne med brøk (6.24)
39	Løse likninger (6.26)
40	Regne med brøk (6.28)

41	Regne med brøk (6.32)
42	Test deg selv
43	Likeverdige brøker – repetisjon (7.1, 7.5)
44	Utvide brøk til en brøk med nevner 10, 100 og 1 000 (7.8, 7.12)
45	Utvide brøk til en brøk med nevner 10, 100 og 1 000 (7.16)
46	Test deg selv
47	Hva er et desimaltall? (8.1)
48	Gjøre om brøk til desimaltall (8.3, 8.5)
49	Gjøre om brøk til desimaltall (to og tre desimaler) (8.6, 8.9)
50	Test deg selv
51	Skrive desimaltall på utvidet form (9.1)
52	Skrive desimaltall på utvidet form (9.4)
53	Skrive desimaltall i plassverditabell (9.8)
54	Merke av desimaltall på en tallinje (9.10)
55	Merke av desimaltall på en tallinje (9.13)
56	Test deg selv
57	Sammenlikne desimaltall (10.1)
58	Sammenlikne desimaltall(10.4)
59	Sammenlikne desimaltall (10.8)
60	Ulikheter med brøk og desimaltall (10.16)
61	Test deg selv
62	Addisjon av desimaltall (11.1)
63	Addisjon av desimaltall (11.4)
64	Addisjon med brøk og desimaltall (11.8)
65	Subtraksjon av desimaltall (11.11)
66	Subtraksjon av desimaltall (11.15)
67	Subtraksjon med brøk og desimaltall (11.18)
68	Test deg selv
69	Desimaltall i plassverditabellen (12.1)
70	Multiplisere desimaltall med 10, 100, 1000,... (12.4)
71	Dividere desimaltall med 10, 100, 1000,... (12.8)
72	Test deg selv
73	Multiplikasjon av desimaltall med et naturlig tall (13.1)
74	Multiplikasjon med desimaltall (13.4)
75	Multiplikasjon med desimaltall (13.9)
76	Test deg selv
77	Divisjon av desimaltall med et naturlig tall (14.1)
78	Divisjon av desimaltall med et naturlig tall (14.6)
79	Divisjon med desimaltall (14.7)
80	Divisjon av desimaltall med et naturlig tall – algoritme (14.10)
81	Divisjon av desimaltall med et naturlig tall – algoritme (14.14)
82	Divisjon med desimaltall – ulike strategier (14.15, 14.20)

83	Test deg selv
84	I hvilke tilfeller kan en brøk gjøres om til et endelig desimaltall? (15.1)
85	I hvilke tilfeller kan en brøk gjøres om til et endelig desimaltall? (15.4)
86	Eksakte og tilnærmede tall. Avrunding. Runde av desimaltall. (15.7, 15.10)
87	Test deg selv
88	Gjøre om 1/3 til desimaltall (16.1)
90	Gjøre om brøk til endelig desimaltall (16.4)
91	Gjøre om brøk til periodisk desimaltall. Periode (16.7, 16.10)
92	Avrunding av periodisk desimaltall (16.16)
93	Test deg selv
94	1 % av et tall (17.1)
95	Finne en gitt prosent av et tall (17.4)
96	Del av at tall og prosent av et tall (17.7)
97	Tekstoppgaver – å finne prosent av et tall (17.10)
98	Finne tallet når en viss prosent av tallet er gitt (17.13)
99	Tekstoppgaver: Finne tallet når en viss prosent av tallet er gitt (17.16, 17.23)
100	Test deg selv
101	Øke noe med en gitt prosent. Prosentvis økning (18.1)
102	Redusere noe med en gitt prosent (18.9)
103	Finne opprinnelig pris e.l. når vi kjenner ny pris og prosentvis økning (18.14)
104	Finne opprinnelig pris e.l. når vi kjenner ny pris og prosentvis reduksjon (18.18)
105	Test deg selv
106	Hvor mange prosent utgjør et tall av et annet tall? (19.1, 19.3)
107	Hvor mange prosent større er et tall enn et annet tall? (19.6)
108	Hvor mange prosent mindre er et tall enn et annet tall? (19.9)
109	Test deg selv

Kommentarer og løsninger til oppgavene

Resten av denne veiledningen inneholder bekrivelse av og løsninger/fasit til hver eneste oppgave i Grunnbok 6A. Det er også gitt en del faglige kommentarer underveis for å hjelpe læreren å plassere stoffet inn i en større sammenheng. Løsningene er ment å være et forslag – det finnes gjerne flere måter å løse en oppgave på.