Innledning

Denne lærerveiledningen er rettet mot lærere som vil undervise i matematikk på 5. trinn for elever som er blitt undervist etter Zankovs modell på 1.-4. trinn og som bruker grunnbøkene «Matematikk 5».

«Matematikk 5» er en del av læreverket Matematikk 5-7 som dekker kompetansemålene i matematikk 5.-7. årstrinn i læreplanen av 2013.

Læreverket for 5. trinn består av to grunnbøker, to oppgavebøker og denne lærerveiledningen. Grunnbøkene og oppgavebøkene inneholder en kort fasit om elevene kan bruke selv for å sjekke svarene sine.

Målet med grunnbøkene er å sørge for maksimal kontinuitet mellom undervisning etter Zankovs modell på barnetrinnet og på mellomtrinnet.

Lærestoffet i bøkene er en naturlig fortsettelse av lærestoffet på 1.-4. trinn og bygger på en undervisningsmodell som er rettet mot generell utvikling av elever og som ble utviklet av den russiske psykologen og pedagogen L.V. Zankov. Zankov var den første til å teste ut L. Vygotskys om teorier om læring, utvikling og undervisning gjennom eksperimentell forskning i russiske barneskoler. Med generell utvikling menes ikke bare intellektuell og emosjonell utvikling, men også utvikling av utholdenhet og moralsk beredskap, dvs. utvikling og dannelse av alle aspektene av barns psyke: utvikling av kognitive, emosjonelle, moralske og etiske kvaliteter og ikke minst interesse og motivasjon, vilje, evne til samarbeid og utholdenhet.

Zankovs undervisningsmodell

Zankovs modell baserer seg på følgende prinsipper som henger tett sammen:

1. Undervisning på et høyt nivå
2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle
3. Rask gjennomgang av stoffet
4. Bevisstgjøring av barna i forhold til egen læringsprosess
5. Systematisk og målrettet utvikling av hvert eneste barn i klasserommet

La oss klargjøre disse prinsippene som vi forsøkte å følge i grunnbøkene.

1. Undervisning på et høyt nivå

Undervisning foregår på et høyt nivå, siden det kun er i denne situasjonen at elevene aktivt kan oppfatte nytt lærestoff. Ifølge L. Vygotsky bør undervisningen ikke rette seg mot «det aktuelle utviklingsnivået» (det som eleven kan utføre alene), men mot «den nærmeste utviklingssonen» (mot utviklingsnivået som forventes av eleven i den nærmeste framtiden). Dette fører til utvikling av barnas evner og selvtillit. Derfor finnes det ikke trivielle oppgaver som bare krever reproduksjon i grunnbøkene. Det forutsettes at hver oppgave i grunnbøkene, som eleven selv er i stand til å løse, er utfordrende. Eleven prøver å overvinne vanskeligheter i sonen for den nærmeste utvikling.

Noen eksempler som illustrerer realisering av dette prinsippet:

Selv om kapitlene 1-8 stort sett inneholder repetisjon, gjennomtenkning og systematisering av stoffet fra 1.-4. trinn, handler verken selve oppgavene eller stoffet om reproduksjon.

101

a Ella valgte seg to uttrykk fra rammen.

Hun satte inn a = 2 304, b = 96 og c = 24, regnet ut og fikk svarene 100 og 0.

Hvilke bokstavuttrykk var det Ella valgte?

$$a - b \cdot c$$
$$a \cdot b - c$$
$$(a + b) : c$$
$$a : (b - c)$$
$$a : b : c$$

Selvsagt kan man sette verdiene til bokstavene inn i alle uttrykkene og regne ut. Det er imidlertid bedre å starte med å eliminere de uttrykkene som umulig kan tilfredsstiller kravene. Et overslag viser f.eks. at verdien til det andre uttrykket må være altfor stort siden $a \cdot b$ blir et stort tall. Videre vet vi at ingen av de to siste uttrykkene kan bli 0, for da måtte a vært lik 0. Ved å ta overslag skjønner vi også at verdiene til disse uttrykkene må være mindre enn 100 (verdien til det fjerde uttrykket må bli rundt 2 100 : 70 = 30 og verdien til det femte må bli rundt 2 000 : 100 : 20 = 1).

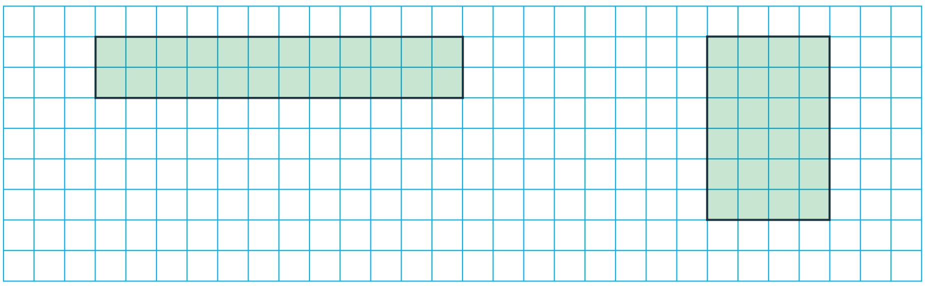
Da står vi kun igjen med det første og det tredje uttrykket. Siden dividenden i det tredje uttrykket ($a + b$) er ulik 0, skjønner vi at det er dette uttrykket som må ha verdi 100. Da må det være det første som har verdi 0. Nå kan vi sette inne tallverdiene og sjekke om vi har rett.

Denne oppgaven handler ikke bare om repetisjon. Oppgaven er rettet mot utvikling av kreativ tenkning (å kunne forutsi resultat, å kunne jobbe målbevisst) og er en illustrasjon av det Zankov mente med «undervisning på et høyt nivå».

Neste oppgave tillater elever selv å komme til forståelse av primtall. Begrepet innføres ved en «geometrisk» tilnærming.

190

a Finn arealene av rektanglene hvis vi bruker en rute som måleenhet.



Hva er sammenheng mellom figurene over og disse likhetene?

$$24 = 12 \cdot 2 \qquad 24 = 4 \cdot 6$$

Skriv 24 som et produkt av to naturlige tall på en annen måte og tegn rektangler som passer til.

b Skriv tallene 20 og 13 som et produkt av to naturlige tall.

Hvor mange rektangler med heltallige sider kan du lage hvis arealet skal være 20 ruter? Hva hvis arealet skal være 13 ruter?

c Tallet 13 er eksempel på det som kalles **primtall**.

Her er de første primtallene: 2, 3, 5, 7, 11, 13.

> *Et **primtall** er et naturlig tall større enn 1 som bare er delelig med seg selv og 1.*

Legg merke til at 1 ikke regnes som et primtall.

Skriv ned alle primtall mindre enn 50.

Det neste eksemplet handler om potenser. Her kreves det ikke bare at elevene skal utføre regneoperasjoner, men også at de skal finne tall som mangler, dvs. det kreves innsats og utholdenhet, ikke bare mekanisk tenkning.

143

b Regn ut.

i) $2^5 \cdot 3^2$	**iv)** $2^2 \cdot 5^3$	**vii)** $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$	**x)** $10^3 : 2^2 : 5$
ii) $2^3 \cdot 3^3$	**v)** $2^3 \cdot 5^2$	**viii)** $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$	**xi)** $12^2 : 2^3 : 3^2$
iii) $2^4 \cdot 3^3$	**vi)** $2^3 \cdot 5^3$	**ix)** $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5^2$	**xii)** $18^2 : 2^2 : 3^3$

c Sett inn grunntall som passer.

i) $\square^5 = 32$	**iii)** $2^4 \cdot \square^2 = 144$	**v)** $\square^2 \cdot \square^2 = 900$
ii) $\square^2 = 1\ 000\ 000$	**iv)** $\square^4 \cdot 5^3 = 2\ 000$	**vi)** $\square^2 \cdot \square^2 \cdot \square^2 = 4\ 900$

Legg merke at underpunktene har ulik vanskelighetsgrad. Dette gir en anledning til å velge det som passer best for elevene i konkrete situasjoner.

Kapitlet «Primtallsfaktorisering» er et annet eksempel som illustrerer prinsippet om undervisning på et høyt nivå. Her ser vi hvor detaljert og dypt primtallsfaktorisering studeres.

Det settes opp flere mål, men de viktigste er:

a) å gi muligheter for elever til selv å finne ideen bak denne faktoriseringen (hva et eller annet tall «består av»)
b) å gi en visualisering av denne type faktorisering – «en graf – et tre»
c) å utvikle ferdigheter i det å utføre primtallsfaktorisering
d) å gi muligheter for elever til selv å finne ulike måter å utføre primtallsfaktorisering
e) å styrke ferdigheter som trengs for å utføre regneoperasjoner med naturlige tall

Oppgavene i grunnbøkene er ikke bare reproduktive. De forutsetter at elevene leter etter nye måter og strategier, at de lærer seg å estimere et resultat på forhånd og at de bruker fantasi og kreativitet.

2. Teoretisk kunnskap har en ledende rolle

Teoretisk kunnskap har en ledende rolle i læringsprosessen, dvs. at undervisningen har en teoretisk tilnærming der elevene må forstå det teoretiske grunnlaget som matematikken bygger på. Det dreier seg om at elevene skal se sammenhenger i lærestoffet. Dette oppnås ved at elevene observerer, sammenlikner, formulerer, analyserer, syntetiserer, retter oppmerksomheten mot spesifikke ting, begrunner, skiller det vesentlige fra det uvesentlige, vurderer fremgangsmåte og resultat, generaliserer og lærer faglige begrep, symboler og definisjoner.

I grunnbøkene henger alle oppgavene sammen på en eller annen måte. De presenterer et tema fra ulike vinkler, utfyller og beriker hverandre. Dette krever først og fremst at kunnskapene som eleven skaper er systematisert og baserer seg på et teoretisk grunnlag.

Dette prinsippet er først og fremst brukt i utviklingen av grunnbøkene. Det legges vekt på å vise sammenhenger mellom ulike emner og oppgaver ved å se på stoffet fra ulike sider og ved å sørge for at de enkelte delene komplementerer hverandre slik at det skapes et helhetlig bilde.

For å vise hvordan forbindelser skapes mellom ulike deler, vil vi igjen se på kapitlet «Primtallsfaktorisering» og se på plassen kapitlet har i læreverket. Dette emnet står på en måte ved siden av de andre temaene, og det berøres dessverre lite i norsk skole. Til tross for dette er det et viktig emne. Kunnskap og ferdigheter som elevene utvikler ved å studere primtalsfaktorisering brukes til:

a) å finne største felles faktor og minste felles multiplum
b) å forkorte brøk
c) å gjøre brøk om til desimaltall
d) å multiplisere og dividere naturlige tall
e) å omforme algebraiske uttrykk etter 7. trinn

Merk at begrepene største felles faktor og minste felles multiplum brukes til forkorting av brøker og til å finne felles nevner samt til algebraiske uttrykk.

Kapitlene «Egenskaper ved divisjon» og «Regler for delelighet» komplementerer elevenes kunnskaper når det gjelder å skrive et tall på utvidet form. Ved å se på utvidet form kan man avgjøre om en gitt divisjon går opp eller ikke.

Prinsippet om at teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle vises også i kravet om *bevisstgjøring* av elever i forhold til deres egen læringsprosess. I de fleste oppgavene kreves det begrunnelse. Ved å begrunne noe er elevene nødt til å undersøke og gå i dybden, ikke bare bruke ferdig kunnskap og regler fremstilt i boka. Dette er en illustrasjon av «ledende rolle av teoretisk kunnskap».

Det å danne et teoretisk grunnlag i et eller annet emne fører til bedre forståelse og gjør opplæringsprosessen enda mer spennende, livlig og interessant.

3. Rask gjennomgang av stoffet

Dette prinsippet innebærer absolutt ikke å skynde seg på en måte som fører til overfladisk læring. Det dreier seg derimot om å eliminere arbeid med oppgaver av samme type som kun er rettet mot dannelse av en eller annen ferdighet. Repetisjon er absolutt nødvendig i læringsprosessen og foregår samtidig som man lærer noe nytt, men repetisjonen må gjennomføres ved at nye elementer kommer inn i læringsprosess. Elever som ikke fikk med seg alt i første omgang, får en sjanse til å utvikle forståelse litt senere, siden stoffet repeteres hele tiden. På denne måten prøver man å unngå kjedsomhet og å gi elever tid for å fordøye det de har lært.

La oss se på hvordan stoff som ble gjennomgått i kapitlene 9-13, repeteres i kapitlene 14-16.

321

a Løs likningene.

i) $4x + 7 = x + 79$ **iii)** $3(z - 1) = z + 33$

ii) $120 - 3y = y$ **iv)** $3(v - 2) = 2(v + 3)$

b Lag en likning der roten er lik største felles faktor for røttene du fikk i a).

c Lag en likning der roten er lik minste felles multiplum for røttene du fikk i a)

330

a Løs likningene.

i) $12 + x = 52 - x$ **iii)** $3(z - 4) = 2(3 + z)$

ii) $5(y - 3) = 3(y + 3)$ **iv)** $2(2v + 1) = 3v + 26$

b Bruk svarene fra a) og finn:

i) MFM(y, z) **ii)** MFM(x, v) **iii)** SFF(x, y, v) **iv)** MFM(x, y, z)

c Lag to likninger der røttene er sammensatte, men relativt primiske tall.
La en medelev løse dem.

327

a **Philip** multipliserte tallene 72 og 175 slik:

$$72 \cdot 175 = (2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 7) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7) = \ldots$$

Forklar hvordan han tenkte og fullfør utregningen.

342

a Hvilke av disse tallene er delelig med 3?

2 181 2 728 40 130 66 444

Hvilke av dem er delelig med 4?

Er et av tallene delelig med 12? Hvordan kan du finne dette tallet?

b Formuler en regel for når et tall er delelig med 12, og skriv ned et par flersifrede tall som er delelig med 12.

Sjekk svaret ved å dele med 12.

c Hvis det er mulig, erstatt ∗ med et siffer slik at tallet blir delelig med 12.

i) 5∗6 **iii)** ∗ ∗14 **v)** 86 86∗ **vii)** 1 111 11∗

ii) 7 77∗ **iv)** ∗1 2∗3 **vi)** 500 ∗00 **viii)** 3 624 48∗

Hvis det finnes flere løsninger, finn alle.
Hvis det ikke finnes noen løsning, begrunn hvorfor ikke.

I de tre første oppgavene betraktes flere emner, og samtidig jobbes det også med kreative oppgaver. Den siste oppgaven utvikler en ny kunnskap: Elevene finner selv en regel for når et tall er delelig med 12 ved å repetere 3-regelen og 4-regelen.

4. Bevisstgjøring av barn i forhold til deres egen læringsprosess

Dette prinsippet forutsetter at barna ikke bare kan svare på spørsmålene «Hvorfor lærer jeg?» og «Forstår jeg det jeg lærer?», men også på spørsmålene «Hvordan kan det jeg lærer nå, knyttes til det jeg allerede kan?», «Hvilken kunnskap trenger jeg for å løse denne oppgaven?» og «Hva førte meg til denne feilen, og hva må jeg gjøre for å unngå å gjøre liknende type feil?»

Hver oppgave i grunnbøkene eksisterer ikke kun for seg selv, men har både langsiktige eller kortsiktige mål, dvs. oppgaven skal brukes til noe. F.eks. hjelper begrepet «største felles faktor» elevene med å forstå ideen bak forkorting av brøk, og begrepet «minste felles multiplum» er til hjelp når de skal finne minste fellesnevner.

Vi tror at det er lurt å stille spørsmål av typen:

- Hvorfor starter vi med brøk og ikke med desimaltall? Kanskje det bør gjøres i motsatt rekkefølge? Hvilke fordeler og ulemper kan det ha? Kanskje blir det mer spennende? (Spørsmålet er ikke trivielt. I noen bøker gjøres det slik – desimaltall først, og deretter brøk. Personlig er vi uenige med denne rekkefølgen.)
- Hvorfor lærer vi først om planfigurer i geometri og deretter om romfigurer? Kanskje er det lurt å gjøre det motsatte, siden vi lever i tredimensjonal verden. (Dette spørsmålet er heller ikke en selvfølge, selv om prinsippet «fra planet til rommet» støttes av forfatterne.)
- Hvorfor lærer vi om likninger på 5. trinn? La oss anta at vi slettet alt som har noe med likninger å gjøre. Hva skjer da? Vil vi mangle kunnskap? I hvilke emner eller situasjoner vil vi bli hemmet av denne mangelen? Kanskje vi kan utsette likninger til 7. trinn?
- Hvorfor har ulike naturlige tall ulik verdi, mens brøker skrevet på ulike måter kan stå for det samme tallet? (F. eks. er alle disse brøkene lik en halv: $\frac{2}{4}$, $\frac{7}{14}$ og $\frac{27}{56}$.)
- Begrepet «likeverdig brøk» gjelder brøker. Finnes det noe liknende for desimaltall? Hvis svaret er «ja», hvordan kan det uttrykkes. Ville dette lettet arbeidet med desimaltall? Vi vet at vi ikke behøver å finne felles nevner eller teller når vi jobber med desimaltall. (Her snakkes det om at verdien til et desimaltall ikke endres ved å føye til nuller bak siste desimal.)
- En elev sa at 96, 112 og 144 er «store» og at 97, 11 og 142 er «små». Hva mente eleven? Gi andre eksemplet på tall som du kunne brukt navnene «store» og «små» på. Hvilken kunnskap manglet du på småskoletrinnet for å kunne se på tallene på denne måten?
- Litt senere begynner du å studere fysikk – vitenskapen om naturen. Et viktig emne i fysikken er studiet av bevegelse. Hvilke kunnskap fra matematikken kan hjelpe deg da?
- Hvilke kunnskaper fra matematikken kan hjelpe deg når du skal løse dagligdagse problemer?

Listen kan utvides i det uendelige. En engasjert lærer kan finne spørsmål ut av sin egen erfaring, smak og behag og elevene sine interesser. Vi tror at det å inkludere slike spørsmål i læringsprosessen kan gjøre opplæringsprosessen enda mer spennende, interessant og produktiv. (Selvsagt er det best om denne type spørsmål også kommer fra elevene selv, og ikke bare fra læreren!)

5. Systematisk og målrettet utvikling av hver eneste elev i klasserommet

Elevene deles ikke inn etter evner, og sammenlignes heller ikke med de andre. Hver elev er unik og lærer i sitt eget tempo ved å jobbe selvstendig eller ved å samarbeide med andre. Det er fokus på et obligatorisk minstekrav og deretter en maksimal utvikling. Prinsippet forutsetter at man observerer utviklingen til hver elev. Elever som viser fremgang må få ros. Elever som har vanskeligheter må hjelpes.

Oppgavene i grunnbøkene er laget slik at både svake og sterke elever finner noe for seg selv som fremmer deres utvikling. I samsvar til Zankovs modell er oppgavene laget slik at eleven selv konstruerer kunnskap. Det finnes ikke tradisjonelle forklaringer eller eksempler som viser hvordan en oppgave kan løses, og det er få drilloppgaver i grunnbøkene. Kunnskap formidles ikke, bortsett fra terminologi, symboler og annen informasjon som bør formidles. Hver oppgave består av en rekke spørsmål og oppgaver som knyttes til et emne. Hver oppgave er en problemløsningsoppgave som eleven bør ha mulighet for å kunne løse. Gjennom en utforskningsprosess kan elevene komme på flere løsningsstrategier. Det er kun en fordel hvis elevene foreslår flere måter å løse en oppgave på. Strategiene diskuteres, og deretter kan man velge de mest effektive og vakre løsningsmetodene.

Typiske egenskaper ved modellen

Følgende egenskaper eller karakteristikker er nært knyttet til de fem prinsippene: Mangfoldighet/allsidighet, kognitiv konflikt, progresjon og variasjon.

Mangfoldighet/Allsidighet i metoder og arbeidsformer

Denne egenskapen dreier seg om at en lærer som bruker Zankovs modell må ha i tankene at opplæring i matematikk ikke bare handler om å utvikle intellektet, men også om å involvere følelser og skape lærelyst. Dette betyr at oppgavene eleven jobber med, må skape interesse hos eleven, må fremme lyst til selvstendig arbeid og til å overvinne vanskeligheter. Oppgavene må også ta vare på estetiske sider ved faget. Matematikere snakker ofte om at matematikk er vakker. Det kan f.eks. dreie seg om å finne en enkel måte å løse en vanskelig oppgave på eller å finne uventede sammenhenger. For elever kan det også dreie seg om å lage egne oppgaver eller bruke ulike løsningsmetoder.

En oppgave kan f.eks. oppfattes som vanskelig, men hvis man finner en ny måte å løse oppgaven på, så viser det seg at den ikke var så vanskelig allikevel. La oss se på en ny måte å sammenlikne brøker. Anta at elevene kan sammenlikne brøker ved å finne felles nevner eller felles teller og ved å se hvor mye som må legges til for å få 1.

380

a) Sammenlikn brøkene.

$$\frac{35}{72} \qquad \frac{51}{98}$$

Hvor mye tid ville du brukt for å finne felles nevner eller felles teller her? Det å finne en felles nevner eller teller kan helt klart være et kjedelig og tidkrevende arbeid. Hva annet kan vi gjøre? I grunnboka gis det tips, i tilfelle elevene ikke kommer på noe selv:

Axel mener at for disse brøkene vil det å finne felles nevner eller teller ta lang tid. Han legger heller merke til at $\frac{1}{2} = \frac{36}{72} = \frac{49}{98}$. Kan han bruke dette til å sammenlikne brøkene på en enklere måte?

Legg merke til ikke bare den faglige framstillingen, men også den emosjonelle siden. Her vises det hvordan et problem som ved første blikk ser vanskelig ut, kan løses ved at man ser noe «lurt» og så bruker dette til å finne en ny måte å løse oppgaven på.

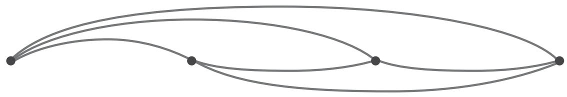
Nå er det nærliggende å spørre om det finnes andre smarte måter å sammenlikne brøker på. Svaret på det er ja: To gitte brøker kan f.eks. sammenliknes med andre tall enn $\frac{1}{2}$. Hvis vi ser et annet tall som er større enn den ene brøken og mindre enn den andre, kan vi tenke på samme måte som over. (Det betraktes i fortsettelsen av oppgaven.)

En av matematikkens egenskaper er å kunne generalisere og se «likheter i ulikheter». Neste oppgave er knyttet til emnet kombinatorikk og gjelder også generalisering:

351

a Løs oppgaven. Bruk modellen nedenfor hvis du trenger det.

Fire elever har kvalifisert seg til en matematikkonkurranse, men bare to kan delta. Det skal trekkes lodd om hvem det blir. Hvor mange ulike resultater kan loddtrekningen gi?



b På hvor mange måter kan man velge to personer av en gruppe på fem?
På hvor mange måter kan man velge to av seks? To av sju?

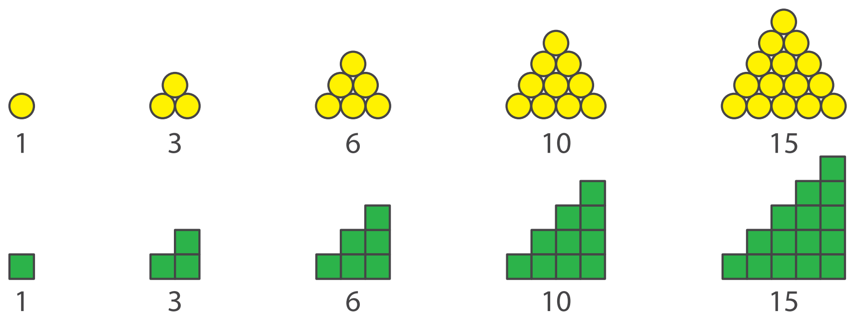
c Fikk du 6, 10, 15 og 21 som svar på de forrige oppgavene?

Finn et mønster og fortsett denne tallfølgen: 6, 10, 15, 21, …
Hvilke naturlige tall passer det å skrive til venstre for 6?

d Tallene 1, 3, 6, 10, 15, 21 kalles **trekanttall**.

> ***Trekanttall*** *er tall som inngår i tallfølgen 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, …*

Se på de to figurseriene og forklar hvorfor disse tallene kalles trekanttall.



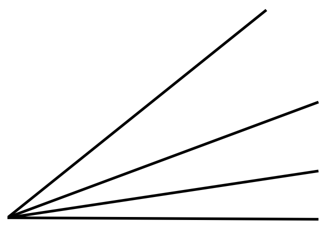
Velg den ene figurtypen og lag tegninger som viser de to neste trekanttallene.

e Lag en kombinatorisk oppgave med trekanttall til svar.

Elevene har tidligere jobbet med oppgaver som likner de i a) og b). Målet her er å generalisere tidligere kunnskap og å vise en uventet og vakker geometrisk representasjon.

Trekanttall dukker opp i mange andre situasjoner, f.eks. når vi skal finne:

- summen av alle naturlige tall f.o.m. 1 til et gitt tall
- antall spisse vinkler i en figur som den til høyre
- maksimalt antall skjæringspunkt mellom n rette linjer
- antall håndtrykk mellom n personer, når alle hilse på alle



Mange av disse problemene skal elevene jobbe med senere.

Punkt e) er også meget viktig. Vi mener at det å lage egne oppgaver er en viktig del av opplæring som aktiviserer ikke bare elevenes kunnskap, men også deres utholdenhet og følelser.

Progresjon

Zankov mente at læringsstoff ikke burde presenteres tema for tema der man går videre til neste tema når elevene har jobbet en stund med det forrige og lært dette godt. Læring er først og fremst en prosess: Ny kunnskap bygger på kunnskapen man har fra før. Tidligere kunnskap bearbeides, man ser på den fra andre vinkler og danner en større struktur med dypere mening.

Denne egenskapen viser seg f.eks. når:
- elevene arbeider med andre emner parallelt med det som er hovedemnet
- elevene skaper en intuitiv forståelse og blir kjent med et tema som vil være hovedtema en gang i fremtiden
- kunnskap som skapes påvirker hverandre og danner et helhetlig bilde
- elevene får utbytte av hver eneste time gjennom å jobbe med oppgavene

La oss f.eks. se på utvikling av et av de viktigste emnene i skolematematikken, nemlig aritmetikk. I kapitlene 1-13 er det naturlige tall som er hovedobjektet. I kapitlene 1-8 studeres hovedsakelig operasjoner med naturlige tall, divisjon med rest, avrunding og potenser, og i kapitlene 9-13 legges hovedvekten på den multiplikative strukturen av naturlige tall (primtallsfaktorisering), ulike måter å utføre divisjon på og viktige tallfunksjoner som største felles faktor og minste felles multiplum. Ved å begrense oss til naturlige tall, utvides dybden på innlæringen av stoffet. Oppgavene som handler om regneoperasjoner med naturlige tall dukker opp igjen i kapittel 14 Brøk (nye måter å multiplisere tall på). Vi ser at temaet «Naturlige tall» ikke bare fortsettes, men også knyttes til andre temaer.

I kapitlene 14-16 utvides tallbegrepet. Hovedobjektet er brøk, som blant annet oppstår ved divisjon av to naturlige tall.

La oss presentere enda et eksempel som viser hvordan tidligere kunnskap brukes når man skal lære et nytt emne og hvordan dette fører til at det skapes et helhetsbilde av pensum. Legg også merke til at eksemplet illustrerer prinsippet om at teoretisk kunnskap skal ha en ledende rolle. Når eleven skal avgjøre om en brøk kan forkortes, bør de bruke tidligere kunnskap om regler for delelighet.

357

a) Forkort brøkene mest mulig. Hvis brøken ikke kan forkortes, så forklar hvorfor.

i) $\frac{20}{24}$	**iii)** $\frac{36}{65}$	**v)** $\frac{85}{32}$	**vii)** $\frac{100}{81}$
ii) $\frac{45}{75}$	**iv)** $\frac{625}{1\,000}$	**vi)** $\frac{72}{96}$	**viii)** $\frac{60}{145}$

b) Hva er største felles faktor for teller og nevner i en brøk som ikke kan forkortes?

Hva kalles to tall som danner en brøk som ikke kan forkortes?

c) Velg teller og nevner blant tallene nedenfor og lag fem ekte brøker som ikke kan forkortes.

56	**60**	**77**	**80**	**111**	**117**	**132**	**243**

d Velg verdier for bokstavene slik at brøkene kan forkortes. Forkort deretter brøkene mest mulig.

$$\frac{m}{90} \quad \frac{121}{n} \quad \frac{p}{252} \quad \frac{288}{q} \quad \frac{r}{169} \quad \frac{153}{s} \quad \frac{t}{247}$$

Velg verdier for bokstavene slik at brøkene ikke kan forkortes.

Kognitiv konflikt

Kognitiv konflikt oppstår når noe nytt møter det gamle, dvs. den kunnskapen man allerede besitter. (Ordet «kollisjon» ble innført av Zankov, uavhengig av Festinger som utarbeidet «cognitive dissonance theory» i 1957.)

Vi mener at kognitive konflikter:

a) hjelper en å forstå et problem dypere

b) skaper interesse for faget

c) skaper lærelyst

d) motiverer til utforskende og selvstendig arbeid

e) hjelper en å komme på et nytt nivå av forståelse

f) tillater en å se estetiske sider ved matematikk

Kognitiv konflikt må løses ved å gi elever anledning til å finne nye veier fra en gitt situasjon. Selve prosessen å løse konflikter krever revurdering av gammel kunnskap og utforsking av nye tilnærminger for å løse et problem. Denne prosessen tillater elever å oppnå et nytt, litt høyere, nivå av forståelse.

Variasjon

Med variasjon menes ikke bare variasjon i oppgaver og metoder, men vel så mye at læreren har frihet til å variere opplegget slik det måtte passet best. Meningen med «variasjon» knyttes tett til uttrykket «det som kan endres». Hvilke «endringer» er det så snakk om når det gjelder opplæring etter Zankovs modell?

1. Tidsrammen til hvert tema kan endres selv om det gis et forslag til hver time.

   Opplæringen er rettet mot utvikling av hver elev. Derfor er arbeidsmåter, rekkefølge, innhold og oppgavetyper avhengig av de individuelle evnene til hver enkelt elev og kan varieres. Oppgavene er varierte i struktur, måten å jobbe på (muntlig, skriftlig) og vanskegrad**.**

   Disponering av tid er relativ i Zankovs klasser. Hvis læreren mener at det går bra med et emne, kan tiden reduseres. Hvis ikke, kan man bruke litt mer tid. Derfor er forslaget til årsplan nedenfor relativt.

2. Variasjon bestemmer strukturen av timen.

   Når en time planlegges, er det flott om læreren viser kreativt initiativ når det gjelder valg av arbeidsmåter, innhold og oppgavetyper, forutsatt at de didaktiske prinsippene beholdes.

3. Man kan velge en passende vanskelighetsgrad.

4. Man kan endre rekkefølgen av oppgavene hvis læreren finner det fornuftig.

Zankovs modell forutsetter at eleven er i stand til å jobbe selvstendig med stoffet i læreboka. Forklaring av stoffet er minimert, og når det gis eksempler på hvordan en oppgave kan løses, er det for at eleven selv skal kunne sjekke sin egen løsning. Repetisjonsoppgaver er preget av noe nytt, og det kreves en kreativ tilnærming fra elevens side. Kunnskap presenteres ikke i en gitt form (med unntak av terminologi, tegn og annen informasjon som må formidles). Kunnskapen konstrueres av eleven gjennom læringsaktiviteter.

Hver oppgave består av «læringsspørsmål», oppgaver og noen forklaringer til et gitt tema. I hver oppgave gis det et problem, som eleven er i stand til å løse. I en utforskningsprosess kommer elevene som regel på flere måter å løse oppgaven på. Man bør diskutere de ulike løsningsstrategiene og velge den mest interessante, vakre eller effektive løsningen. På den måten får elevene anledning til å se på problemet fra ulike sider og dermed utvikle seg videre.

I oppgave 367 sammenlikner to elever brøkene $\frac{1}{2}$ og $\frac{11}{20}$ slik:

Fredrik:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 10}{2 \cdot 10} = \frac{10}{20}$$

Siden $\frac{10}{20} < \frac{11}{20}$, så…

Sana:

$$\frac{1}{2} = \frac{1 \cdot 11}{2 \cdot 11} = \frac{11}{22}$$

Siden… , så…

Elevene får beskjed om å gjøre ferdig disse resonnementene. Som vi ser bruker begge elevene i eksemplet likeverdig brøk når de skal sammenlikne brøkene. Den ene finner en felles nevner for de to brøkene, og den andre finner en felles teller. I det videre arbeidet sammenliknes de to metodene, og man velger den som passer best til en konkret situasjon.

I valg av oppgaver må læreren ta i betraktning strukturen av timen, mulige vanskeligheter som kan oppstå hos elevene osv. Videre er det opp til læreren å avgjøre hvilke deler av en oppgave som bør gjøres i klasserommet og hvilke som kan gjøres hjemme.

Noen karakteristikker ved timene

1. Timen bør være dynamisk – stoffet gjennomgås i et raskt tempo. Det bør være interessent for elever å være tilstede i timen. De må være aktive og vise interesse for det de driver med. Læreren må ikke føle seg låst av rutiner. Det er viktig å unngå at elevene kjeder seg. Derfor bør man bruke ikke for mye tid på det samme. Man bør også unngå for mye gjentakelse i timen. Læreren bør i det hele tatt være opptatt av at det skal være livlig i klasserommet.
2. Læreren må være fleksibel og åpen. Emosjonell komfort i timen og det at det skapes en god stemning i klasserommet er viktig for læringsprosessen. Elevene må ikke være redde for å gjøre feil. Finn noe som barnet kan gis ros for (det må være ekte). Elevene bør ikke sammenliknes med hverandre, men med seg selv. Det er vesentlig å involvere **alle** elevene, noe som innebærer å tilpasse nivået.
3. Læreren må forstå hensikten med hver eneste oppgave som velges (hva er det den utvikler?). Videre må hver elev ha utbytte av **hver** time.
4. Det meste av tiden i klasserommet brukes på at elevene jobber selvstendig eller at klassen diskuterer ulike løsningsstrategier. Oppgavene har ulik vanskegrad, og man bør sørge for å inkludere oppgaver som passer bra for de som strever slik at de blir tryggere og stoler på seg selv.

Oppbyggingen av timene kan skjematisk beskrives slik:

1. Læreren formulerer en problemstilling som svarer til det som er hovedtema i timen.
2. Elevene leter etter løsningsstrategier, diskusjoner settes i gang, og det foregår utveksling av ideer.

3. Læreren dirigerer prosessen og leder diskusjonen mot de mest aktuelle aspektene ved temaet.
4. Når problemet som hører til hovedtemaet er løst, diskuteres resultatene og uklarheter elimineres.
5. Elevene jobber med oppgaver med sikte på å konsolidere den tilegnede kunnskapen og danne grunnleggende ferdigheter.
6. Læreren gir elever mulighet til å utveksle meninger. Elevene kan lage egne oppgaver eller legge frem forslag til hvordan man kan jobbe videre med dette emnet osv.
7. Læreren oppsummerer timen og vurderer elevenes innsats. I den forbindelse legges det større vekt på aktiv deltakelse i læringsprosessen enn på resultatoppnåelse.

I vedlegg fra s. 186 og utover finner leseren utdrag fra klasserommet. Utdragene inneholder en tenkt samtale mellom lærer og elever med utgangspunkt i oppgaver/tema fra grunnbøkene. Det er viktig å lese disse matematiske samtalene før man går i gang med undervisningen.

Oversikt over innholdet i grunnbøkene

Naturlige tall
Følgen av de naturlige tall. Titallsystem. Tall på utvidet form. Posisjonssystem. Romertall som et eksempel på noe som ikke er et posisjonssystem. Sammenlikne naturlige tall. Aritmetiske lover for naturlige tall. Divisjon med rest. Potenser med naturlige tall som grunntall og eksponent. Regning med potenser. Avrunding av naturlige tall. Alternative algoritmer for multiplikasjon og divisjon av naturlige tall.

Elementer av tallteori
Primtall og sammensatte tall. Primtallsfaktorisering. Faktorer i et naturlig tall. Multiplum av et naturlig tall. Felles faktor og felles multiplum. Største felles faktor og minste felles multiplum. Relativt primiske tall.

Delelighetsregler
Egenskaper ved divisjon av en sum, en differanse og et produkt. Delelighetsregler for 2, 5, 10, 4, 25, 9 og 3.

Brøk
Hvordan en brøk dannes og hvordan den skrives. Sammenheng mellom brøk og divisjon av naturlige tall. Ekte og uekte brøker. Likeverdig brøk. Forkorting av brøk. Sammenlikning av brøk. Blandede tall. Omgjøring av uekte brøk til blandet tall og omvendt.

Desimaltall
Bruk av desimaltall som måltall for ulike størrelser. Addisjon og subtraksjon av enkle desimaltall knyttet til lengdemål. Sammenheng mellom desimaltall og brøk.

Elementer av algebra
Talluttrykk og bokstavuttrykk. Tallverdien til en bokstavuttrykk. Formel. Enkle lineære likninger som har naturlige tall eller brøker som røtter. Sammenheng mellom likninger og tekstoppgaver. Kjennskap til enkle algebraiske ulikheter.

Tekstoppgaver
Oversettelse av en tekstoppgave til matematisk språk. Kjennskap til ulike modeller.
Klassifisering av tekstoppgaver etter egenskaper: felles innhold, modell, løsningsstrategi.
Aritmetisk og algebraisk metode for å løse tekstoppgaver. Analyse av tekstoppgaver.

Kreative oppgaver som knyttes til å lage oppgaver som passer til en gitt modell.
Oppgaver som handler om bevegelse av objekter, arbeid som utføres samtidig – likheter mellom denne type oppgaver. Gjennomsnitt. Oppgaver der man må finne en del av et tall eller finne et tall ved å vite delen.

Elementer av kombinatorikk
Egenskaper ved kombinatoriske oppgaver. Enkle kombinatoriske oppgaver. Bruk av ulike modeller som f.eks. graf og trediagram for å visualisere en kombinatorisk oppgave.

Elementer av geometri
Linjestykke, stråle, rett linje og plasseringer av rette linjer. Parallelle linjer og linjer som står vinkelrett på hverandre. Vinkler og klassifisering av vinkler. Måling av vinkler. Navn på vinkler. Halveringslinje. Like vinkel. Kjennskap til nabovinkler og toppvinkler.
Sirkel og begreper knyttet til sirkelen: radius, diameter, korde, bue, sentralvinkel.
Trekanter og klassifisering av trekanter etter ulike egenskaper: spissvinklede, rettvinklede, stumpvinklede, likesidede, likebeinte.

Oppbygningen av grunnbøkene

Grunnbøkene består av følgende kapitler:

Grunnbok 5A	**Grunnbok 5B**
1. Tallsystem	9. Primtallsfaktorisering
2. Algoritmer. Sammenlikne naturlige tall	10. Faktor i et tall og multiplum av et tall
3. Addisjon og subtraksjon av naturlige tall	11. Største felles faktor. Minste felles multiplum
4. Multiplikasjon og divisjon av naturlige tall	12. Egenskaper ved divisjon
5. Talluttrykk og bokstavuttrykk	13. Regler for delelighet
6. Divisjon med rest	14. Brøk
7. Potenser	15. Likeverdig brøk
8. Avrunding av naturlige tall	16. Sammenlikning av brøk
	17. Blandede tall

Hvert kapittel består av oppgaver. Disse er gruppert i blokker, der hver blokk består av 2 til 4 oppgaver. Det antas at elevene jobber med én slik blokk per time (45 min), selv om dette ikke er obligatorisk. Den ene oppgaven i hver blokk er en hovedoppgave og svarer til et tema som oppgaven knyttes til. De andre er «støtteoppgaver» som er litt mindre i innhold. Meningen med disse oppgavene er at de:

- utvikler og utdyper gjennomgått stoff
- styrker kunnskap og ferdigheter som er oppnådd tidligere
- forbereder til læring av et nytt stoff
- inkluderer viktige innholdsmessige momenter som ikke står som enkelte temaer i bøkene (tekstoppgaver, kombinatorikk, elementer av algebra og geometri)

Den ene støtteoppgaven er en tekstoppgave eller en oppgave i geometri. De andre er som regel knyttet til talluttrykk eller bokstavuttrykk, likninger og/eller ulikheter. Til en blokk er det oppgaver fra ulike emner for å gjøre arbeidet i timen enda mer spennende og variert.

På slutten av hvert kapittel er det varierte oppgaver fra hele kapitlet. Det er en samling med litt utfordrende oppgaver til de elevene som trenger det («Hjernetrim») og et forslag til prøve («Test deg selv»).

Oppgavene i grunnbøkene har underpunkt som:

- hjelper til med å utvide et problem eller formulere en problemstilling
- gir tips eller hjelp til de som trenger det
- kan brukes til å skape diskusjon
- fører til analyse av resultatene.

Det er oppgaver som skal styrke ferdigheter, men også oppgaver som er utfordrende og kreative.

Det anbefales at man jobber med de første punktene i en oppgave i klasserommet, mens resten kan gjøres hjemme. Men alt er avhengig av situasjonen i klasserommet – læreren bestemmer selv.

Arbeid med oppgavebøker

De to oppgavebøkene er ment å skulle støtte og komplementere grunnbøkene. Oppgavene i disse bøkene er tett knyttet til tilsvarende emner i grunnbøkene. Derfor er det lurt å jobbe med oppgavebøkene parallelt med grunnboka. Samtidig (læreren bestemmer!) kan noen oppgaver derfra brukes for repetisjon, individuelt arbeid, ulike tester eller prøver.

Hver oppgavebok inneholder de samme tematiske hovedemnene som grunnbøkene. En vesentlig plass vies til aritmetikk (tallregning). Ikke alle emner fra grunnbøkene er viet tilsvarende plass i oppgavebøkene. F.eks. er hovedarbeidet med tekstoppgaver lagt til grunnbøkene. Samtidig legges det stor vekt på geometri i oppgavebøkene. Algebraoppgavene er først og fremst rettet mot det å løse og lage likninger.

Oppgavene i oppgavebøkene har ulik vanskegrad. Noen kan løses ved hjelp av hoderegning. I oppgaver med mange liknende underpunkt, er disse forsøkt plassert i økende vanskegrad. Dette for å hjelpe læreren med å differensiere.

Differensiering

Det er lagt vekt på å framstille stoffet på en induktiv måte, slik at elevene selv finner sammenhenger og løsninger. Dette vil sette mange elever i stand til å arbeide selvstendig, samtidig som det gir dem et godt grunnlag for senere tilegnelse av stoffet. Læreren får dermed også en ekstra mulighet for differensiering ved at stoff kan gjennomgås for grupper av elever, mens andre arbeider selvstendig.

Noen råd knyttet til differensiering:

1. Læreren kan fortelle at det ikke er nødvendig å løse *alle* oppgavene – det er bedre å løse én oppgave riktig enn 10 oppgaver feil. Dette kan hjelpe elever som sliter til ikke å skynde seg, men heller tenke nøye gjennom og rette løsningen han eller hun har funnet flere ganger.
2. De sterke elevene kan oppfordres til å lage egne oppgaver som likner på de som de har jobbet med. Sterke elever har en tendens til å søke kunnskap selv og bør gis mulighet til dette. Forskjellen mellom elever på ulike nivå ser man gjerne i antall riktige oppgaver, antall løsningsstrategier og måten de bruker strategier på.
3. Læreren kan hjelpe elever som sliter, mens andre elever jobber selvstendig med oppgaver. Gjennom diskusjon i felleskap kan stoffet presiseres og utdypes. God stemning i klasserommet er meget viktig for alle elevene.
4. For elever som sliter i faget er det viktig å gi ros når de har arbeidet godt, når de våger å hive seg frampå, når de kommer med egne ideer, osv. Det er viktig å styrke selvtilliten deres slik at de får tro på at de kan. Man bør unngå å sammenlikne disse elevene med de som gjør flere oppgaver, dvs. unngå en konkurransestemning. Samtidig er konkurranse viktig for de sterke elevene: hvem som laget flest oppgaver, mer spennende oppgaver?
5. Læreren må bruke ulike måter å oppmuntre elever på.

6. I Zankovs modell prøver man å skape timer der alle elevene, uansett nivå, skal kunne løse både typiske og ikke typiske, utforskende oppgaver.

Forslag til årsplan

Nedenfor har vi satt opp et forslag til årsplan. Forslaget er ment å være veiledende. Det legges til grunn at elevene får omtrent 109 klokketimer med matematikkundervisning i løpet av skoleåret, slik læreplanen tilsier.

I årsplanen er hovedoppgavene (nevnt ovenfor) fordelt på timene. Målene for disse kan knyttes til området «Tall og algebra» i læreplanen. Andre emner står ikke i tabellen, men disse er jevnt fordelt i grunnbøkene.

Time	Hovedtema (nr. på hovedoppgave i parentes)
1	Følgen av de naturlige tall (1)
2	Tallsystem (3)
3	Plassverdisystem (5)
4	Plassverditabell (7)
5	Tallinje (11)
6	Romertall (16)
7	Test deg selv
8	Algoritme (21)
9	Algoritme for å sammenlikne naturlige tall med ulikt antall siffer (25)
10	Kombinatoriske oppgaver (26)
11	Algoritme for å sammenlikne naturlige tall (30)
12	Test deg selv
13	Addisjon som hopping langs en tallinje (38)
14	Addisjonslover (41)
15	Addisjonsalgoritme (46)
16	Subtraksjon som det motsatte av addisjon (49)
17	Subtraksjonsalgoritme (53)
18	Test deg selv
19	Multiplikasjon av naturlige tall. Multiplikasjonslover (60)
20	Den distributive loven for multiplikasjon (64)
21	Løse opp parentesen. Sette felles faktor utenfor en parentes (68)
22	Multiplikasjonsalgoritme (75)
23	Divisjon som det motsatte av multiplikasjon (78)
24	Divisjonsalgoritme (81)
25	Test deg selv
26	Talluttrykk. Regler for regnerekkefølge (92)
27	Talluttrykk og bokstavuttrykk (96)
28	Talluttrykk og bokstavuttrykk (102)
29	Formel (matematisk språk) (107)
30	Matematisk modell (111)
31	Test deg selv

32	Divisjon med rest (117)
33	Divisjon med rest på generell form (121)
34	Algoritme for divisjon med rest (125)
35	Mulige rester ved en divisjon (129)
36	Test deg selv
37	Potens (140)
38	Regne med potens (143)
39	Regne med potens (148)
40	Kvadrattall (152)
41	Kubikktall (157)
42	Test deg selv
43	Avrunding av naturlige tall (166)
44	Algoritme for avrunding (176)
45	Hoderegningsstrategier (178)
46	Test deg selv
47	
48	**Vår**
49	Faktorisere et tall (187)
50	Primtall (190)
51	Primtallsfaktorisering (194)
52	Primtallsfaktorisering. Skrive ved å bruke potenser. (197)
53	Algoritme for å finne primtall (Eratosthenes såld) (200)
54	Primtall og sammensatte tall (203)
55	Primtallsfaktorisering av et produkt (207)
56	Primtallsfaktorisering av potenser (209)
57	Test deg selv
58	Faktorene i et naturlig tall (217)
59	Finne alle faktorene i et tall og finne tall med gitte faktorer (221)
60	Multiplum av et naturlig tall (225)
61	Antall multiplum av et naturlig tall (228)
62	Faktor i et tall og primfaktor i tallet (235)
63	Et tall og multiplum av tallet (239)
64	Test deg selv
65	Største felles faktor (246)
66	Algoritmer for å finne største felles faktor (251, 253)
67	Minste felles multiplum (258)
68	Algoritmer for å finne minste felles multiplum (260, 263)
69	Relativt primiske tall (268)
70	Relativt primiske tall og deres faktorisering (271)
71	Test deg selv
72	Divisjon der divisor er en sum eller differanse (275)
73	Divisjon der divisor er en sum med flere ledd (277)

Kommentarer og løsninger til oppgavene

Resten av denne veiledningen inneholder kommentarer til oppgavene i grunnbøkene. Innhold og/eller mål til hver eneste oppgave er gitt. Ellers er det gitt kommentarer, råd og tips til noen av punktene. Enkelte oppgaver har fullstendig løsning. En ren tallfasit er oppgitt i slutten av grunnbøkene.

En del av oppgavene er spesielt merket med «viktig». Det betyr ikke at de andre ikke er viktige. Hver eneste oppgave inngår som en del av helheten. Men noen oppgaver inneholder moment som kan få betydning for senere oppgaver – det kan f.eks. dreie seg om innføring av et nytt begrep eller forslag til en ny strategi. Ved å merke oppgaven som «viktig» gjøres læreren oppmerksom på at det ikke er uproblematisk å hoppe over den.